Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Тян, Структурное представление решения системы линейных алгебраических уравнений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 158–162

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:32:22

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Добрынин С. А., Фельдман М. С., Фирсов Г. И. Методы автоматизированного исследования вибраций машин: Справочник. — М.: Машиностроение, 1987. — 224 с.
2. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник. — Киев: Наук. думка, 1971. — 376 с.
3. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. — М.: Машиностроение, 1978. — 352 с.
4. Басков А. Г., Кратко А. Г., Бовсуновский А.П. и др. Автоматизированная система измерения характеристики демпфирования колебаний механических систем на основе микроЭВМ // Проблемы прочности, 1990. — № 1. С. 119–112.
5. Зотеев В. Е. Разработка и исследование линейных дискретных моделей колебаний диссипативных систем // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ–мат. науки», 1999. — № 7. — С. 170–177.
6. Зотеев В. Е., Попова Д. Н. Определение динамических характеристик нелинейных диссипативных систем на основе стохастического разностного уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ–мат. науки», 2006. — № 42. — С. 162–168.

Поступила 15.10.2006.

УДК 519.6(075.8)

В. К. Тяп

СТРУКТУРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Предложен структурный подход к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), позволяющий реализовать сходящийся алгоритм численного решения СЛАУ. Получено условие сходимости периодической структуры. Рассмотренный подход может быть использован для вычисления ряда линейных операторов.

Представим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в виде следующего векторного уравнения:

$$Az = u, \quad (1)$$

где A — заданная матрица, z — искомый вектор, u — наблюдаемый вектор; $z \in F$, $u \in U$; F , U — некоторые нормированные пространства.

Если система линейных алгебраических уравнений невырождена, т.е. матрица A является квадратной и ее определитель не равен нулю ($\det A \neq 0$), то решение системы (1) запишется в следующем виде [1]:

$$z = A^{-1}u. \quad (2)$$

Во многих практических задачах, например в задачах синтеза систем управления, идентификации динамических объектов управления, сбора и обработки информации и ряде других задач, получаемая система алгебраических уравнений описывается операторным уравнением типа (1), при этом матрица A , как правило, является прямоугольной, что обусловлено условиями эксперимента и необходимостью получения достоверного результата [2–4].

В предлагаемой работе представлен алгоритм решения поставленной задачи с использованием бесконечных периодических структур.

Задача состоит в нахождении вектора z по вектору u . В случае квадратной матрицы, как отмечалось выше, уравнение (1) представляет собой систему n уравнений с n неизвестными. Решение в этом случае, если оно существует, находится однозначно в соответствии с (2). Если матрица прямоугольная, то уравнение (1) носит условный характер и решений может быть бесконечно много. Выбор решения, как правило, носит оптимизационный характер. С учетом вышесказанного, уравнению (1) соответствует структурная схема, представленная на рис. 1. Структурная схема оптимизационной постановки задачи представлена на рис. 2.

Сформулируем оптимизационную постановку решения СЛАУ, записанную в виде (1), не зависимо от вида матрицы A .

Данная структурная схема описывается системой векторных уравнений:

$$\begin{cases} z = A_k u, \\ x = Az, \\ \delta = u - x, \end{cases} \quad (3)$$

где A_k — некоторая матрица, о роли которой будет сказано ниже; x — вектор, минимизирующий ошибку δ в метрике пространства U , причем $x, \delta \in U$.

Оптимизационная задача формулируется следующим образом: необходимо найти значение $z_0 \in F$, минимизирующее погрешность δ в метрике пространства U , т.е. невязка $\rho_u(Az_0, u)$ на этом значении z достигает своего минимума. Таким образом, искомое решение ищется исходя из следующего условия:

$$\rho_u(Az_0, u) = \inf \rho_u(Az, u), \quad z \in F. \quad (4)$$

Ошибка δ равна нулю при выполнении условия

$$AA_k = I. \quad (5)$$

В этом случае матрица A является квадратной и из последнего равенства следует (при условии, что $\det A \neq 0$)

$$A_k = A^{-1}. \quad (6)$$

В случае прямоугольной матрицы решение матричного уравнения (5) неоднозначно, а из оптимизационной постановки, о которой говорилось выше, следует, что матрица A_k должна быть псевдообратной [1], т.е.

$$A_k = A^+, \quad (7)$$

где A^+ — псевдообратная матрица. В этом случае выражение (5) носит условный характер.

Умножив справа левую и правую части выражения (5) на матрицу A , получим точное равенство

$$AA_k A = A. \quad (8)$$

Последнее выражение означает, что матрица A_k должна быть псевдообратной. Кроме того, условное матричное уравнение (5) фактически является определением псевдообратной матрицы [1]. Таким образом, задача нахождения искомого значения z_0 сводится к решению обратной задачи с предварительным нахождением псевдообратной матрицы A_k .

Рассмотрим постановку данной задачи в методе подбора [2–4]. В этом методе заранее определенным образом задается подкласс возможных решений $M \in F$ и решается прямая задача на элементах данного подкласса. Выбирается элемент $z_0 \in M$, на котором достигается минимум невязки, т.е.

$$\rho_u(Az_0, u) = \inf \rho_u(Az, u), \quad z \in M. \quad (9)$$

Как будет показано ниже, в предлагаемом методе:

- 1) нет необходимости заранее задавать подкласс возможных решений;
- 2) отсутствует процедура минимизации функционала (9).

Рассмотрим пространства U, F в операторном уравнении (1). Элементами этих пространств являются арифметические вектора, а сами пространства являются действительными n -мерными пространствами, в которых можно рассматривать различные нормы. Традиционно используются следующие нормы.

В евклидовом пространстве i^n норма имеет вид [1] —

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}; \quad (10)$$

Рис. 1. Структурное представление СЛАУ

Рис. 2. Структурное представление оптимизационной постановки решения СЛАУ

в пространстве $\mathbb{R}^n_1$ норма —

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|; \quad (11)$$

в пространстве $\mathbb{R}^n_\infty$ —

$$\|x\|_\infty = \max |x_k|, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (12)$$

Как известно, метрические пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_1$, $\mathbb{R}^n_\infty$ с нормами (10)–(12) являются полными и, следовательно, банаховыми [6]. Для оценки сходимости матричных рядов подразумевается норма матрицы, введенная либо аксиоматически, либо согласовано с векторными нормами соответствующих пространств. Выбор той или иной нормы матрицы конкретизируется решаемой задачей.

Структурное представление решения операторного уравнения (1) основывается на следующем.

Из системы уравнений (3) и условия (4) следует

$$\|(I - AA_n)u\| \rightarrow \min, \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (13)$$

где I — единичная матрица.

На основании (6) логично формулируется требование по норме матриц в виде

$$\|I - AA_k\| \rightarrow \min. \quad (14)$$

Таким образом, как следует из (14), необходимо найти такую матрицу A_k , минимизирующую норму матрицы $I - AA_k$ в метрике рассматриваемых пространств и, следовательно, минимизирующую ошибку δ .

Заметим, что условие (13) эквивалентно следующему:

$$\|\delta\| \rightarrow \min, \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Предлагается следующая периодическая структура матрицы A_k (см. рис. 3), в которой повторяющаяся структура (ячейка) состоит из трех матриц I , A_0 , A , а количество ячеек обозначено индексом k .

Рис. 3. Структура матрицы A_k

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем матрицу A_0 стабилизирующей матрицей, а представленную на рис. 3 матричную структуру фундаментальной, если последовательность периодических структур при неограниченном увеличении количества периодических ячеек данной структуры описывается фундаментальной последовательностью матриц.

ЛЕММА. Для того чтобы представленная на рис. 3 периодическая структура была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и A_0 удовлетворяли условию

$$\|I - AA_0\| < 1. \quad (16)$$

Доказательство. Рассмотрим необходимость. Пусть периодическая структура фундаментальна. Следовательно, разность матриц

$$\Delta A_k = A_{k+1} - A_k \quad (17)$$

в заданной метрике стремится к нулю при неограниченном увеличении количества ячеек, т. е.

$$\lim \|\Delta A_k\| = 0, \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Данная структура матрицы A_n описывается следующей системой векторных уравнений:

$$\begin{cases} \Delta U_0 = A_0 u, \\ \Delta_1 = [I - AA_0] u, \\ \Delta U_1 = A_0 \Delta_1, \\ \Delta_2 = I \Delta_1 - A \Delta U_1, \\ \Delta U_2 = A_0 \Delta_2, \\ \dots\dots\dots \\ \Delta_k = I \Delta_{k-1} - A \Delta U_{k-1}, \\ \Delta U_k = A_0 \Delta_k. \end{cases} \quad (18)$$

Из системы (18) следует операторное выражение для структуры длиной k

$$z_k = A_0 \left[I + \sum_{i=1}^k [I - AA_0]^i \right] u. \quad (19)$$

Матрица, описывающая представленную на рис. 3 периодическую структуру длиной k , имеет вид

$$A_k = A_0 \left[I + \sum_{i=1}^k [I - AA_0]^i \right]. \quad (20)$$

Аналогично, структура с $(k+1)$ ячейкой описывается следующим оператором:

$$A_{k+1} = \left[I + \sum_{i=1}^{k+1} [I - AA_0]^i \right] A_0. \quad (21)$$

Найдем разность матриц:

$$\Delta A_k = A_{k+1} - A_k. \quad (22)$$

С учетом (20), (21) после некоторых преобразований имеем

$$\Delta A_k = [I - AA_0]^k. \quad (23)$$

Из (23) следует, что необходимым условием фундаментальности периодической структуры, представленной на рис. 3, является условие

$$\|I - AA_0\| < 1. \quad (24)$$

Докажем достаточность, т.е. пусть выполняется условие (16). А это означает выполнение условия фундаментальности из приведенного выше доказательства. Таким образом, лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. При выполнении условия фундаментальности периодической структуры (24) фундаментальная структура является ограниченной, а матрица периодической структуры сходится к псевдообратной матрице A^+ .

Доказательство. Умножив слева обе части матричного уравнения (20) на матрицу A , получим

$$AA_k = AA_0 \left[I + \sum_{i=1}^k [I - AA_0]^i \right] \quad (25)$$

или

$$AA_k = AA_0 \sum_{i=0}^k [I - AA_0]^i. \quad (26)$$

После несложных преобразований имеем

$$AA_k = \sum_{i=0}^k [I - AA_0]^i - [I - AA_0]^{k+1}. \quad (27)$$

После суммирования окончательно получаем

$$AA_k = I - [I - AA_0]^{k+1}. \quad (28)$$

При соблюдении условия фундаментальности (16) выполняются следующие неравенства [6]

$$\sum_{i=0}^{\infty} \| [I - AA_0]^i \| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \| I - AA_0 \|^i < \infty. \quad (29)$$

Из полноты рассматриваемых пространств и из сходимости ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \| [I - AA_0]^i \| \quad (30)$$

из (28) следует, что произведение матриц AA_k является ограниченным. Так как матрица A является ограниченной, то, следовательно, матрица A_k является так же ограниченной при любом значении k .

Таким образом, первая часть теоремы об ограниченности фундаментальной структуры доказана.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Умножив справа обе части матричного уравнения (28) на матрицу A , получим

$$AA_k A = [I - (I - AA_0)^{k+1}] A. \quad (31)$$

Предельное значение выражения (31) с учетом (24) примет вид

$$\lim AA_k A = A, \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Следовательно,

$$A_{\infty} = A^+. \quad (33)$$

Заметим, что если матрица A является квадратной, то выражение (33) совпадает с выражением (6). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Необходимым и достаточным условием сходимости фундаментальной матричной структуры, описываемой матричным рядом (20), является ограничение спектра произведения матриц AA_0 единичной окружностью комплексной плоскости с центром (0, 1).*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть фундаментальная матричная структура сходится. Введем следующую матрицу:

$$A_{\lambda} = AA_0. \quad (34)$$

Тогда скалярная функция, порождающая уравнение (20) и определенная на спектре произведения матриц AA_0 , запишется в виде

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^n (1 - \lambda)^k. \quad (35)$$

Из условия сходимости фундаментальной матричной структуры следует условие сходимости ряда (35), имеющего следующий вид:

$$|1 - \lambda| < 1, \quad (36)$$

которое должно выполняться на спектре произведения матриц AA_0 . А это означает, что спектр произведения матриц AA_0 должен находиться в круге единичного радиуса с центром (0, 1). Таким образом, доказано необходимое условие сходимости.

Докажем достаточность. Пусть спектр произведения матриц AA_0 ограничен единичной окружностью комплексной плоскости с центром (0, 1). Отсюда следует справедливость неравенства (36) и сходимость функции (35), определенной на спектре произведения матриц AA_0 . Из последнего следует сходимость фундаментальной матричной структуры. Теорема доказана.

Таким образом, матричная структура, представленная на рис. 2, позволяет находить решение СЛАУ (1) независимо от вида матрицы A , т.е. позволяет вычислить как обратную, так и псевдообратную матрицы.

Синтез стохастических систем управления с использованием периодических структур представлен в работе [7].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 549 с.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 286 с.
3. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990. — 230 с.
4. Некорректные задачи естествознания / Под ред. А. Н. Тихонова, А. В. Гончарского. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 304 с.
5. Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. — М.: Машиностроение, 1990. — 364 с.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
7. Рапопорт Э. Я., Тянь В. К. Достижение заданной инвариантности в стохастических системах комбинированного управления. — Куйбышев: КИТИ, 1989. — 9 с. — (Деп. в ВИНТИ 20.06.89. № 4089–В89).

Поступила 4.07.2006 г.