Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Матакаев, Об осциллируемости решений одного класса систем дифференциальных уравнений высшего порядка, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000, выпуск 9, 184–185

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu47>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:10:13

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.917

А.И. Матакаев

ОБ ОСЦИЛЛИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Исследована задача осциллируемости решений одного класса систем дифференциальных уравнений высшего порядка.

Вопросу осцилляции решений систем дифференциальных уравнений посвящен ряд работ (см., например, [1] и библиографию, указанную там же). Однако в отличие от предлагаемой заметки, в этих работах рассматривались только системы не выше второго порядка.

Определения [2]

1. Скалярную функцию $\varphi(t)\{D(\varphi)=[t_0, +\infty)\}$ называют неосциллирующей, если $\exists t_1 \geq t_0$ такое, что для $\forall t \geq t_1$ либо $\varphi(t) > 0$, либо $\varphi(t) < 0$. В противном случае ее называют осциллирующей.

2. Векторную функцию называют: осциллирующей (неосциллирующей), если все ее координаты осциллируют (не осциллируют);

слабо неосциллирующей, если среди ее координат имеются как осциллирующие, так и неосциллирующие.

В системе

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) f_k[y(h_k(t))]; \\ y'(t) = x(t) \end{cases} \quad (1)$$

в дальнейшем всюду предполагается:

а) $a_k(t)$ $k=1, m$ - непрерывные неотрицательные функции на $[t_0, +\infty)$;

б) $f_k(z)$, $h_k(t)$ $k=1, m$ - непрерывные неотрицательные функции для $\forall z \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ и $\forall t \in [t_0, +\infty)$, $\forall z \neq 0$ $z f_k(z) > 0$, $t \leq h_k(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Т е о р е м а. Пусть

$$1) \int_{t_0}^{\infty} h'(t) \left\{ \int_t^{h(t)} [h(t) - s]^{n-1} \sum_{k=1}^m a_k(s) ds \right\} dt = +\infty,$$

$$2) \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{dz}{f(z)} < +\infty, \quad \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{dz}{f(z)} < +\infty, \quad \varepsilon = \text{const} > 0,$$

где $f(z) = \min_{1 \leq k \leq m} f_k(z)$, $h(t) = \min_{1 \leq k \leq m} h_k(t)$.

Тогда все решения с ограниченной первой компонентой системы (1) осциллируют.

Доказательство. Допустим, что система имеет слабо осциллирующее решение $(x(t), y(t))$.

Тогда одна из координат решения не осциллирует, другая координата осциллирует. Предположим, что $x(t)$ не осциллирует, $y(t)$ осциллирует. Тогда $\exists t_1 \geq t_0$ такое, что для $\forall t \geq t_1$ либо

$x(t) > 0$, либо $x(t) < 0$. Рассмотрим случай $x(t) > 0 \quad \forall t \geq t_1$. Из второго уравнения системы следует, что $y(t)$ - возрастающая функция $\forall t \geq t_1$, что противоречит осциллируемости функции $y(t)$. В случае $x(t) < 0 \quad \forall t \geq t_1$, аналогично рассуждая, приходим к противоречию. Допустим, что координата $y(t)$ не осциллирует, $x(t)$ - осциллирует. Тогда $\exists t_2 \geq t_1$ такое, что для $\forall t \geq t_2$ либо $y(t) > 0$, либо $y(t) < 0$. Предположим, что $\forall t \geq t_2 \quad y(t) > 0$. Так как $h_k(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то $\exists t_3 \geq t_2$ такое, что $\forall t \geq t_3 \quad y[h_k(t)] > 0, \quad k = \overline{1, m}$. Тогда $\forall t \geq t_3 \quad f_k(y[h_k(t)]) > 0, \quad k = \overline{1, m}$. С учетом этого неравенства из первого равенства системы вытекает, что $\forall t \geq t_3 \quad x^{(n)}(t) \geq 0$. Следовательно, в виду ограниченности $x(t) \quad \exists t_4 \geq t_3$ такое, что $\forall t \geq t_4 \quad x^{(j)}(t) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$.

Применив формулу Тейлора

$$x(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{(j)}(t)}{j!} (s-t)^j + \frac{1}{(n-1)!} \int_t^s (s-u)^{n-1} x^{(n)}(u) du$$

к системе, получим $\forall s > t \geq t_4$

$$x(s) \geq \frac{1}{(n-1)!} \int_1^s (s-u)^{n-1} \sum_{k=1}^m a_k(u) f_k[y(h_k(u))] du,$$

или, в силу предположения б) и второго уравнения системы-

$$y'(s) \geq \frac{f_k[y(h_k(u))]}{(n-1)!} \int_t^s (s-u)^{n-1} \sum_{k=1}^m a_k(u) du.$$

Заменяв в этом неравенстве s на $h(t)$, получим

$$\frac{y'(h(t))}{f_k[y(h_k(u))]} \geq \frac{1}{(n-1)!} \int_t^{h(t)} (h(t)-u)^{n-1} \sum_{k=1}^m a_k(u) du.$$

Умножив, получим неравенство на $h'(t) \geq 0$ и проинтегрируем его от t_4 до t . Тогда получим неравенство

$$\int_{t_4}^t \frac{dz}{f(z)} \geq \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_4}^t h'(s) \left(\int_s^{h(s)} [h(s)-u]^{n-1} \sum_{k=1}^m a_k(u) du \right) ds,$$

из которого при $t \rightarrow +\infty$ получим условие, противоречащее теореме. В случае $y(t) < 0 \quad \forall t \geq t_2$ теорема доказывается аналогично.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шевель В.Н., Варех Н.В., Грицай А.Г. Об осцилляторных свойствах решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / Институт матем. АН Укр. ССР. Препринт. № 82.2. 1982. С.48.
2. Быков Я.В. Об одном классе систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1. № 11. С. 1449-1475.