Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. И. Дёмина, Критерий единственности решения краевых задач для гиперболического уравнения в цилиндрической области, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 175–178

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:24:37

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956

Т. И. Дёмина

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Получено необходимое и достаточное условие единственности решения трёх смешанных задач для гиперболического уравнения в цилиндрической области.

Пусть D — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с кусочно-гладкой границей σ ; J — интервал $0 < y < T$; $\Omega_{0T} = D \times J$ — цилиндрическая область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ точек (x, y) ; S_{0T} — граница Ω_{0T} ; $S_\sigma = \sigma \times J$ — боковая поверхность.

В области Ω_{0T} рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \left[a^{ij}(x) u_{x_i} \right]_{x_j} - c(x)u - u_{yy} = 0, \quad (1)$$

где $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$, $\forall x \in D$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; матрица $\|a^{ij}(x)\|$, $\forall x \in D$ положительно определена; $c(x) \geq 0$, $\forall x \in D$; функции $a^{ij}(x)$, $c(x)$ достаточно регулярны в области D .

Выпишем все краевые условия, которые будут использованы при постановке краевых задач I–IV для уравнения (1):

$$u(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in S_\sigma, \quad (2)$$

$$u(x, T) = 0, \quad \forall x \in D, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \forall x \in D, \quad (4)$$

$$u_y(x, T) = 0, \quad \forall x \in D, \quad (5)$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad \forall x \in D. \quad (6)$$

ЗАДАЧИ I–IV. Найти регулярное в области Ω_{0T} решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C^1(\bar{\Omega}_{0T})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям: в случае I выполняется группа условий (2), (4), (5); в случае II — группа условий (2), (3), (6); в случае III — группа условий (2), (5), (6); в случае IV — группа условий (2), (3), (4).

Заметим, что задача Дирихле для уравнения (1) (задача IV) рассмотрена в работе [1], где получено необходимое и достаточное условие существования единственности решения этой задачи. Предложенный метод используется в данной работе для решения поставленных смешанных задач I–III.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если S_{0T} , $a^{ij}(x)$ и $c(x)$ обладают тем свойством, что и система собственных функций $\{v_k(x)\}$, соответствующих собственным значениям λ_k однородной задачи

$$\left[a^{ij}(x) v_{x_i} \right]_{x_j} - c(x)v + \lambda^2 v = 0, \quad x \in D, \quad (7)$$

$$v|_\sigma = 0, \quad (8)$$

полна в пространстве $L^2(D)$ и $v_k(x) \in W_2^1(D) \cap C^2(D)$, $k = 1, 2, \dots$, тогда любое решение задачи I — (1), (2), (4), (5); задачи II — (1), (2), (3), (6); задачи III — (1), (2), (5), (6) тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда выполняется условие

для задач I и II:

$$\lambda_k T \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad k, m = 1, 2, \dots; \quad (9)$$

для задачи III:

$$\lambda_k T \neq \pi m, \quad k, m = 1, 2, \dots. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи I, II или III. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0, \forall (x, y) \in \Omega_{0T}$.

Действительно, функция $w(x, y) = v_k(x)\omega_k(y)$ для любого k представляет собой решение уравнения (1) из класса $C^1(\bar{\Omega}_{0T}) \cap C^2(\Omega_{0T})$, тогда $w_y(x, y) = v_k(x)\omega'_k(y)$. Из уравнения $\omega''_k(y) + \lambda_k^2 \omega_k(y) = 0, k = 1, 2, \dots$ находим $\omega_k(y) = C_1 \cos \lambda_k y + C_2 \sin \lambda_k y$, где C_1, C_2 — постоянные величины, и $\omega'_k(y) = -\lambda_k (C_1 \sin \lambda_k y - C_2 \cos \lambda_k y)$. Функции $w(x, y)$ и $w_y(x, y)$ удовлетворяют краевым условиям (3)–(6), а именно:

задача I: $w(x, y) = 0, \forall (x, y) \in S_\sigma; w(x, 0) = 0, \forall x \in D; w_y(x, T) = 0, \forall x \in D;$

задача II: $w(x, y) = 0, \forall (x, y) \in S_\sigma; w_y(x, 0) = 0, \forall x \in D; w(x, T) = 0, \forall x \in D;$

задача III: $w(x, y) = 0, \forall (x, y) \in S_\sigma; w_y(x, 0) = 0, \forall x \in D; w_y(x, T) = 0, \forall x \in D.$

Для самосопряженного дифференциального оператора L справедливо равенство

$$wTu - uTw = \left[a^{ij}(x)(wu_{x_i} - uw_{x_i}) \right]_{x_j} - [wu_y - uw_y]_{y}. \quad (11)$$

Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$ и область Ω_{0T}^ε внутри Ω_{0T} с границей S_{0T}^ε . Обозначим через $v_{x_j} = \cos(v, x_j), j = 1, 2, \dots, n, v_y = \cos(v, y)$ — направляющие косинусы внешней нормали v к границе S_{0T}^ε ; dS — элемент поверхности. Учитывая $S_{0T}^\varepsilon = S_\sigma^\varepsilon \cup D_0^\varepsilon \cup D_T^\varepsilon$, где $D_0^\varepsilon = D^\varepsilon \times \{y = \varepsilon\}, D_T^\varepsilon = D^\varepsilon \times \{y = T - \varepsilon\}, D^\varepsilon$ — область внутри D , проинтегрируем равенство (11) по области Ω_{0T}^ε . Пользуясь формулой Грина [2, с.145], получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{0T}^\varepsilon} (wLu - uLw) dx dy &= \int_{S_{0T}^\varepsilon} \left[a^{ij}(x)(wu_{x_i} - uw_{x_i})v_{x_j} - (wu_y - uw_y)v_y \right] dS = \\ &= \int_{D_0^\varepsilon \cup D_T^\varepsilon} \left[a^{ij}(x)(wu_{x_i} - uw_{x_i})v_{x_j} - (wu_y - uw_y)v_y \right] dS + \\ &\quad + \int_{S_\sigma^\varepsilon} \left[a^{ij}(x)(wu_{x_i} - uw_{x_i})v_{x_j} - (wu_y - uw_y)v_y \right] dS = \\ &= - \int_{D_0^\varepsilon \cup D_T^\varepsilon} (wu_y - uw_y)v_y dS + \int_{S_\sigma^\varepsilon} a^{ij}(x)(wu_{x_i} - uw_{x_i})v_{x_j} dS = - \int_{D_0^\varepsilon \cup D_T^\varepsilon} (wu_y - uw_y)v_y dS = \\ &= \int_{D^\varepsilon} \left[w(x, 0)u_y(x, 0) - u(x, 0)w_y(x, 0) \right] dx - \int_{D^\varepsilon} \left[w(x, T)u_y(x, T) - u(x, T)w_y(x, T) \right] dx = \\ &= \int_{D^\varepsilon} \left[v_k(x)\omega_k(0)u_y(x, 0) - u(x, 0)v_k(x)\omega'_k(0) \right] dx - \int_{D^\varepsilon} \left[v_k(x)\omega_k(T)u_y(x, T) - u(x, T)v_k(x)\omega'_k(T) \right] dx. \end{aligned}$$

Или

$$\int_{D^\varepsilon} v_k(x) \left[\omega_k(0)u_y(x, 0) - \omega'_k(0)u(x, 0) - \omega_k(T)u_y(x, T) + \omega'_k(T)u(x, T) \right] dx. \quad (12)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\Omega_{0T}^\varepsilon \rightarrow \Omega_{0T}$, из равенства (12) получаем:

в задаче I, с учётом условий (4), (5) —

$$\int_D v_k(x) \left[\omega_k(0)u_y(x, 0) + \omega'_k(T)u(x, T) \right] dx = 0, \quad (13)$$

в задаче II, с учётом условий (3), (6) —

$$\int_D v_k(x) \left[-\omega'_k(0)u(x, 0) - \omega_k(T)u_y(x, T) \right] dx = 0, \quad (14)$$

в задаче III, с учётом условий (5), (6) —

$$\int_D v_k(x) [-\omega'_k(0)u(x,0) + \omega'_k(T)u(x,T)] dx = 0. \quad (15)$$

На основании леммы Лагранжа [2, с. 24], а также учитывая $\omega_k(0) = 0$ в задаче I и $\omega'_k(0) = 0$ в задачах II и III, получаем: при условии (9) из равенства (13) — $u(x,T) = 0$, из равенства (14) — $u_y(x,T) = 0$, при условии (10) из равенства (15) — $u(x,T) = 0$.

Далее, преобразуем выражение

$$\begin{aligned} u_y Lu &= u_y \left[a^{ij}(x) u_{x_i} \right]_{x_j} - c(x) u u_y - u_{yy} u_y = \\ &= \left[a^{ij}(x) u_{x_i} u_y \right]_{x_j} - a^{ij}(x) u_{yx_j} u_{x_i} - \frac{1}{2} \left[c(x) u^2 \right]_y - \frac{1}{2} (u_y^2)_y = \\ &= \left[a^{ij}(x) u_{x_i} u_y \right]_{x_j} - \frac{1}{2} \left[a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right]_y - \frac{1}{2} \left[c(x) u^2 \right]_y - \frac{1}{2} (u_y^2)_y. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$2u_y Lu = 2 \left[a^{ij}(x) u_{x_i} u_y \right]_{x_j} - \left[a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + u_y^2 + c(x) u^2 \right]_y. \quad (16)$$

Пусть Ω_{hT} — часть Ω_{0T} , ограниченная плоскостями $y = h$, $0 \leq h < T$ и $y = T$; S_{hT} — граница Ω_{hT} . Интегрируя равенство (16) по области Ω_{hT}^ε , $\varepsilon > 0$, расположенной внутри области Ω_{hT} , с учетом условий (2), (3), (5), в зависимости от условий задач I–III, а также перейдя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega_{hT}} u_y Lu dx dy &= \int_{S_{hT}} \left[2a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} v_{x_j} - \left(a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + u_y^2 + c(x) u^2 \right) v_y \right] dS = \\ &= \int_{S_{hT}} \left(a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + u_y^2 + c(x) u^2 \right) \Big|_{y=h} dx = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из определения $\|a^{ij}(x)\|$, $c(x) \geq 0$, $0 \leq h < T$ следует, что равенство (17) возможно, если первые производные в области Ω_{0T} равны нулю, следовательно, $u \equiv \text{const}$ в Ω_{0T} и $u = 0$ на S_{0T} , тогда $u \equiv 0$ в Ω_{0T} .

Если в теореме не выполняются условия (9) или (10), тогда имеются положительные целые числа m и k , для которых $\lambda_k T = \frac{\pi}{2} + \pi m$ или $\lambda_k T = \pi m$, и тогда функция $u(x, y) = v_k(x) \omega_k(y)$ является нетривиальным решением задачи I, II или III. Теорема доказана.

Рассмотрим смешанные задачи I, II, III для уравнения (1) при $n = 1$, когда коэффициенты $a^{ij}(x)$ и $c(x)$ — постоянные величины. Например, если $a^{ij}(x) \equiv 1$, $c(x) \equiv c$, из (1) получается телеграфное уравнение

$$u_{xx} - cu - u_{yy} = 0.$$

Выберем прямоугольную область $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < T\}$. Задача для нахождения собственных значений имеет вид

$$\begin{aligned} v'' + (\lambda^2 - c)v &= 0, \quad 0 < x < a; \\ v(0) &= v(a) = 0. \end{aligned}$$

Собственные значения будут следующими:

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + c}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для задач I и II условие единственности (9) принимает вид

$$T \sqrt{\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + c} \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad k, m = 1, 2, \dots,$$

для задачи III условие единственности (10) имеет вид

$$T\sqrt{\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2} + c \neq \pi m, \quad k, m = 1, 2, \dots$$

Автор выражает благодарность А.М. Нахушеву за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении данной работы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Dumminger D. R., Zachmanoglou E. C.* The Condition for Uniqueness of the Dirichlet Problem for Hyperbolic Equations in Cylindrical Domains // J. of Math. and Mech., 1969. — Vol.18, No. 8.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.

Поступила 4.09.2006 г.

УДК 517.956

А.А. Токова

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Для нагруженного уравнения $a(y)u_{xx} + b(y)u_x + c(y)u = \frac{\text{sign } x |x|^m}{\beta - \alpha} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, y) dx + f(x, y)$ рассматри-

вается задача с нелокальными краевыми условиями. Опираясь на общее представление решений уравнения, доказывается теорема существования и единственности решения задачи.

В области $\Omega = \{(x, y) : \alpha < x < \beta, 0 < y < T\}$ рассмотрим нагруженное уравнение (см. [1])

$$a(y)u_{xx} + b(y)u_x + c(y)u = \text{sign } x \cdot |x|^m \bar{u}_y + f(x, y), \quad (1)$$

где α, β, T, m — действительные числа, $\alpha < 0, \beta > 0, m > 0$; $a(y) \neq 0, b(y), c(y)$ — заданные функции из класса $C[0, T] \cap C^1(0, T)$; $f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$; $f_y(x, y) \in C(\Omega)$; $\bar{u}$ — интегральное среднее значение функции $u(x, y)$ по переменной x на сегменте $[\alpha, \beta]$:

$$\bar{u} = \delta_u(y) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, y) dx.$$

Следуя А. М. Нахушеву (см. [2]), любое точное решение уравнения (1) можно интерпретировать как приближенное решение следующего уравнения:

$$a(y)u_{xx} + b(y)u_x + c(y)u = \text{sign } x \cdot |x|^m u_y + f(x, y).$$

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω будем называть решение $u = u(x, y)$, такое, что $u \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx} \in C(\Omega)$, $\delta_u(y) \in C^1(0, T)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу.

ЗАДАЧА. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1) с производной $u_x = \partial u / \partial x$, непрерывной вплоть до точек (α, y) и (β, y) , $0 < y < T$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$B_1 u \equiv \gamma_1 u(\alpha, y) + \gamma_2 u(\beta, y) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq T; \quad (2)$$

$$B_2 u \equiv \mu_1 u_x(\alpha, y) + \mu_2 u_x(\beta, y) + \mu_3 u(\alpha, y) = \psi(y), \quad 0 < y < T; \quad (3)$$

$$\delta_u(0) = \delta_0, \quad (4)$$

где γ_i, μ_j ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$), δ_0 — заданные числа, причем $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 \neq 0$, $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \gamma_2^2 \neq 0$; $\varphi(y), \psi(y) \in C[0, T] \cap C^1(0, T)$ — заданные функции.

Пусть $D = b^2(y) - 4a(y)c(y)$; $2\lambda = b(y)/a(y)$; $2p = \sqrt{D}/a(y)$;