Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Токова, Задача с нелокальными краевыми условиями для одного класса нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 178–181

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:30:49

$$T\sqrt{\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2} + c \neq \pi m, \quad k, m = 1, 2, \dots$$

Автор выражает благодарность А.М. Нахушеву за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении данной работы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Dumminger D. R., Zachmanoglou E. C.* The Condition for Uniqueness of the Dirichlet Problem for Hyperbolic Equations in Cylindrical Domains // J. of Math. and Mech., 1969. — Vol.18, No. 8.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.

Поступила 4.09.2006 г.

УДК 517.956

А.А. Токова

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Для нагруженного уравнения $a(y)u_{xx} + b(y)u_x + c(y)u = \frac{\text{sign } x |x|^m}{\beta - \alpha} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, y) dx + f(x, y)$ рассматри-

вается задача с нелокальными краевыми условиями. Опираясь на общее представление решений уравнения, доказывается теорема существования и единственности решения задачи.

В области $\Omega = \{(x, y) : \alpha < x < \beta, 0 < y < T\}$ рассмотрим нагруженное уравнение (см. [1])

$$a(y)u_{xx} + b(y)u_x + c(y)u = \text{sign } x \cdot |x|^m \bar{u}_y + f(x, y), \quad (1)$$

где α, β, T, m — действительные числа, $\alpha < 0, \beta > 0, m > 0$; $a(y) \neq 0, b(y), c(y)$ — заданные функции из класса $C[0, T] \cap C^1(0, T)$; $f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$; $f_y(x, y) \in C(\Omega)$; $\bar{u}$ — интегральное среднее значение функции $u(x, y)$ по переменной x на сегменте $[\alpha, \beta]$:

$$\bar{u} = \delta_u(y) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} u(x, y) dx.$$

Следуя А. М. Нахушеву (см. [2]), любое точное решение уравнения (1) можно интерпретировать как приближенное решение следующего уравнения:

$$a(y)u_{xx} + b(y)u_x + c(y)u = \text{sign } x \cdot |x|^m u_y + f(x, y).$$

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω будем называть решение $u = u(x, y)$, такое, что $u \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx} \in C(\Omega)$, $\delta_u(y) \in C^1(0, T)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу.

ЗАДАЧА. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1) с производной $u_x = \partial u / \partial x$, непрерывной вплоть до точек (α, y) и (β, y) , $0 < y < T$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$B_1 u \equiv \gamma_1 u(\alpha, y) + \gamma_2 u(\beta, y) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq T; \quad (2)$$

$$B_2 u \equiv \mu_1 u_x(\alpha, y) + \mu_2 u_x(\beta, y) + \mu_3 u(\alpha, y) = \psi(y), \quad 0 < y < T; \quad (3)$$

$$\delta_u(0) = \delta_0, \quad (4)$$

где γ_i, μ_j ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$), δ_0 — заданные числа, причем $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 \neq 0$, $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \gamma_2^2 \neq 0$; $\varphi(y), \psi(y) \in C[0, T] \cap C^1(0, T)$ — заданные функции.

Пусть $D = b^2(y) - 4a(y)c(y)$; $2\lambda = b(y)/a(y)$; $2p = \sqrt{D}/a(y)$;

$$w(x, y) = \frac{|x|^{m+1}}{a(y)} \int_0^1 (1-z)^m \operatorname{sh}(pxz) \exp(-\lambda xz) dz ;$$

$$F(x, y) = \frac{1}{a(y)p} \int_0^x \operatorname{sh}[p(x-\xi)] \exp[\lambda(\xi-x)] f(\xi, y) d\xi ;$$

$$u_1(x, y) = 2 \exp(-\lambda x) \operatorname{ch}(px), \quad u_2(x, y) = \frac{1}{p} \exp(-\lambda x) \operatorname{sh}(px).$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия

$$(B_1 u_1)(B_2 u_2) \neq (B_1 u_2)(B_2 u_1), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \delta_{u_1}(y) [(B_1 u_2)(B_2 w) - (B_2 u_2)(B_1 w)] + \delta_{u_2}(y) [(B_2 u_1)(B_1 w) - (B_1 u_1)(B_2 w)] \neq \\ \neq \delta_w(y) [(B_1 u_2)(B_2 u_1) - (B_1 u_1)(B_2 u_2)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)–(4).

В терминах коэффициентов условие (5) теоремы можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{p} \left(\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1 + \frac{1}{\lambda} \gamma_2 \mu_3 \right) \operatorname{sh}[p(\alpha - \beta)] + (\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1) \operatorname{ch}[p(\alpha - \beta)] + \\ + \gamma_1 \mu_1 \exp[\lambda(\beta - \alpha)] + \gamma_2 \mu_2 \neq 0 ; \end{aligned}$$

условие (6) — в виде:

$$\begin{aligned} & [\exp(\alpha \lambda) [p \operatorname{sh}(\beta p) + \lambda \operatorname{ch}(\beta p)] - \exp(\beta \lambda) [p \operatorname{sh}(\alpha p) + \lambda \operatorname{ch}(\alpha p)]] \times \\ & \times \left\{ (\gamma_1 \exp(-\alpha \lambda) \operatorname{sh}(\alpha p) + \gamma_2 \exp(-\beta \lambda) \operatorname{sh}(\beta p)) \times \right. \\ & \times \left[|\alpha| m (\mu_1 (m+1) + \mu_3 |\alpha|) \int_0^1 (1-z)^m \exp(-\alpha \lambda z) \operatorname{sh}(\alpha p z) dz + \right. \\ & + \mu_1 |\alpha|^{m+1} \int_0^1 (1-z)^m z \exp(-\alpha \lambda z) (p \operatorname{ch}(\alpha p z) - \lambda \operatorname{sh}(\alpha p z)) dz + \\ & + \mu_2 \left((m+1) \beta^m \int_0^1 (1-z)^m \exp(-\beta \lambda z) \operatorname{sh}(\beta p z) dz + \right. \\ & \left. \left. + \beta^{m+1} \int_0^1 (1-z)^m z \exp(-\beta \lambda z) (p \operatorname{ch}(\beta p z) - \lambda \operatorname{sh}(\beta p z)) dz \right) \right] - \\ & - [\mu_1 \exp(-\alpha \lambda) [p \operatorname{ch}(\alpha p) - \lambda \operatorname{sh}(\alpha p)] + \\ & + \mu_2 \exp(-\beta \lambda) [p \operatorname{ch}(\beta p) - \lambda \operatorname{sh}(\beta p)] + \mu_3 \exp(-\alpha \lambda) \operatorname{sh}(\alpha p)] \times \\ & \times \left(\gamma_1 |\alpha|^{m+1} \int_0^1 (1-z)^m \exp(-\alpha \lambda z) \operatorname{sh}(\alpha p z) dz + \right. \\ & + \gamma_2 \beta^{m+1} \int_0^1 (1-z)^m \exp(-\beta \lambda z) \operatorname{sh}(\beta p z) dz \left. \right) \Bigg\} + \\ & + [\exp(\alpha \lambda) [p \operatorname{ch}(\beta p) + \lambda \operatorname{sh}(\beta p)] - \exp(\beta \lambda) [p \operatorname{ch}(\alpha p) + \lambda \operatorname{sh}(\alpha p)]] \times \\ & \times \left\{ [\mu_1 \exp(-\alpha \lambda) [p \operatorname{sh}(\alpha p) - \lambda \operatorname{ch}(\alpha p)] + \right. \\ & + \mu_2 \exp(-\beta \lambda) [p \operatorname{sh}(\beta p) - \lambda \operatorname{ch}(\beta p)] + \mu_3 \exp(-\alpha \lambda) \operatorname{ch}(\alpha p)] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\gamma_1 |\alpha|^{m+1} \int_0^1 (1-z)^m \exp(-\alpha \lambda z) \operatorname{sh}(\alpha p z) dz + \gamma_2 \beta^{m+1} \int_0^1 (1-z)^m \exp(-\beta \lambda z) \operatorname{sh}(\beta p z) dz \right) - \\
& - (\gamma_1 \exp(-\alpha \lambda) \operatorname{ch}(\alpha p) + \gamma_2 \exp(-\beta \lambda) \operatorname{ch}(\beta p)) \times \\
& \times \left[|\alpha|^m (\mu_1 (m+1) + \mu_3 |\alpha|) \int_0^1 (1-z)^m \exp(-\alpha \lambda z) \operatorname{sh}(\alpha p z) dz + \right. \\
& + \mu_1 |\alpha|^{m+1} \int_0^1 (1-z)^m z \exp(-\alpha \lambda z) (p \operatorname{ch}(\alpha p z) - \lambda \operatorname{sh}(\alpha p z)) dz + \\
& + \mu_2 \left((m+1) \beta^m \int_0^1 (1-z)^m \exp(-\beta \lambda z) \operatorname{sh}(\beta p z) dz + \right. \\
& \left. \left. + \beta^{m+1} \int_0^1 (1-z)^m z \exp(-\beta \lambda z) (p \operatorname{ch}(\beta p z) - \lambda \operatorname{sh}(\beta p z)) dz \right) \right] \neq \\
& \neq p (\lambda^2 - p^2) \left[\frac{\lambda}{p} \left(\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1 + \frac{1}{\lambda} \gamma_2 \mu_3 \right) \operatorname{sh}[p(\alpha - \beta)] + (\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1) \operatorname{ch}[p(\alpha - \beta)] + \right. \\
& \left. + \gamma_1 \mu_1 \exp[\lambda(\beta - \alpha)] + \gamma_2 \mu_2 \int_{\alpha}^{\beta} |x|^{m+1} \int_0^1 (1-z)^m \exp(-x \lambda z) \operatorname{sh}(x p z) dz dx \right].
\end{aligned}$$

До к а з а т е л ь с т в о. Решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(x, y) = C_1(y) u_1(x, y) + C_2(y) u_2(x, y) + w(x, y) \delta'_u(y) + F(x, y), \quad (7)$$

где

$$\delta_u(y) - \delta_w(y) \delta'_u(y) = C_1(y) \delta_{u_1}(y) + C_2(y) \delta_{u_2}(y) + \delta_F(y), \quad (8)$$

$C_1(y)$, $C_2(y)$ — произвольные функции из класса $C[0, T] \cap C^1(0, T)$.

Удовлетворяя функцию (7) условиям (2) и (3) задачи, получим для нахождения $C_1(y)$, $C_2(y)$ систему уравнений

$$\begin{vmatrix} B_1 u_1 & B_1 u_2 \\ B_2 u_1 & B_2 u_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1(y) \\ C_2(y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(y) - \delta'_u(y) (B_1 w) - B_1 F \\ \psi(y) - \delta'_u(y) (B_2 w) - B_2 F \end{vmatrix}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}
C_i(y) &= C_i^0(y) + C_i^1(y) \delta'_u(y) \quad (i = 1, 2); \\
C_1^0(y) &= \frac{(B_2 u_2) (\varphi(y) - B_1 F) - (B_1 u_2) (\psi(y) - B_2 F)}{(B_1 u_1) (B_2 u_2) - (B_1 u_2) (B_2 u_1)}, \\
C_1^1(y) &= \frac{(B_1 u_2) (B_2 w) - (B_2 u_2) (B_1 w)}{(B_1 u_1) (B_2 u_2) - (B_1 u_2) (B_2 u_1)}, \\
C_2^0(y) &= \frac{(B_1 u_1) (\psi(y) - B_2 F) - (B_2 u_1) (\varphi(y) - B_1 F)}{(B_1 u_1) (B_2 u_2) - (B_1 u_2) (B_2 u_1)}, \\
C_2^1(y) &= \frac{(B_2 u_1) (B_1 w) - (B_1 u_1) (B_2 w)}{(B_1 u_1) (B_2 u_2) - (B_1 u_2) (B_2 u_1)}.
\end{aligned}$$

После того как найдены $C_1(y)$ и $C_2(y)$, подставив их значения в (8), получим уравнение

$$\delta_u(y) - K(y) \delta'_u(y) = H(y), \quad (10)$$

где $K(y) = \delta_{u_1}(y) C_1^1(y) + \delta_{u_2}(y) C_2^1(y) + \delta_w(y)$; $H(y) = \delta_{u_1}(y) C_1^0(y) + \delta_{u_2}(y) C_2^0(y) + \delta_F(y)$.

Легко видеть, что функции $K(y)$ и $H(y)$ являются непрерывными функциями при выполнении условия (5). Функция $K(y)$ представима в виде

$$K(y) = \delta_w(y) + \frac{\delta_{u_1}(y) [(B_1 u_2) (B_2 w) - (B_2 u_2) (B_1 w)]}{(B_1 u_1) (B_2 u_2) - (B_1 u_2) (B_2 u_1)} + \frac{\delta_{u_2}(y) [(B_2 u_1) (B_1 w) - (B_1 u_1) (B_2 w)]}{(B_1 u_1) (B_2 u_2) - (B_1 u_2) (B_2 u_1)}.$$

При $K(y) \neq 0$ уравнение (10) можно переписать в виде

$$\delta_u'(y) + K_1(y)\delta_u(y) = H_1(y), \quad (11)$$

где $K_1(y) = -\frac{1}{K(y)}$, $H_1(y) = -\frac{H(y)}{K(y)}$. Из представления функции $K(y)$ видно, что $K(y) \neq 0$ при выполнении условия (6).

Из условия (4) для нахождения $\delta_u(y)$ получим задачу Коши

$$\delta_u(0) = \delta_0 \quad (12)$$

для уравнения (11). Известно [3], что задача (11), (12) однозначно разрешима, когда $K_1(y)$, $H_1(y)$ непрерывные функции, то есть когда $K(y) \neq 0$. Следовательно, и решение задачи (1)–(4) определяется единственным образом. Нетрудно проверить, что функция $u(x, y)$, определяемая выражением (7), удовлетворяет краевым условиям (2)–(3). Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А. М. Нахушеву за ценные советы и внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения, 1976. — Т. 12, № 1. — С. 103–108.
2. Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения, 1982. — Т. 18, № 1. — С. 77–81.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — Т. 2. — М.: Наука, 1974. — 655 с.

Поступила 4.09.2006 г.

УДК 517.581

Н. А. Вирченко

О НЕКОТОРЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ОБОБЩЕННОЙ КОНФЛЮЭНТНОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

Рассмотрены интегральные операторы с функцией ${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}$, композиции с операторами дробного интегродифференцирования, с операторами типа потенциала и др.

1. Разнообразие задач, уравнений, порождающих специальные функции, ведет к заметному увеличению числа функций (от простейших трансцендентных к гипергеометрическим функциям разной природы). Следует подчеркнуть и большое значение специальных функций для теории и практического использования интегральных преобразований.

Непрерывное развитие математической физики, механики сплошной среды, квантовой механики, аэродинамики, теории вероятностей, астрофизики и др. вызывает введение новых специальных функций [1].

Введем (τ, β) -обобщенную конфлюэнтную гипергеометрическую функцию

$${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \times {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (c; \tau); \\ (c; \beta); \end{matrix} \middle| zt^\tau \right] dt, \quad (1)$$

где $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$; $\tau \in \mathbb{I}$, $\tau > 0$; $\beta \in \mathbb{I}$, $\beta > 0$; ${}_1\Psi_1$ — функция Фокса–Райта [2]. Если в (1) положить $\beta = \tau$, то получим ${}_1\Phi_1^{\tau}(z)$ [3]. При $\tau = \beta = 1$ имеем классическую конфлюэнтную гипергеометрическую функцию $\Phi(a; c; z)$ [2].

ЛЕММА 1. Если $\alpha, \lambda \in \mathbb{E}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$; $r \in \mathbb{E}$; $\gamma > 0$; $\tau \in \mathbb{I}$, $\tau > 0$; $\beta \in \mathbb{I}$, $\beta > 0$; $\beta - \tau > -1$, то справедливо следующее композиционное соотношение

$$I_{0+}^{\alpha} \left(t^{\lambda-1} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; rt^{\gamma}) \right) (x) = x^{\lambda+\alpha-1} {}_2\Phi_2^{\tau, \beta, \gamma}(a, \lambda; c, \lambda + \alpha; rx^{\gamma}).$$

ЛЕММА 2. Если $\alpha, \lambda \in \mathbb{E}$, $\operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} \alpha > 0$; $r \in \mathbb{E}$; $\gamma > 0$; $\tau \in \mathbb{I}$, $\tau > 0$; $\beta \in \mathbb{I}$, $\beta > 0$; $\beta - \tau > -1$, то справедливо следующее композиционное соотношение

$$I_{0-}^{\alpha} \left(t^{-\lambda} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; rt^{-\gamma}) \right) (x) = x^{\alpha-\lambda} {}_2\Phi_2^{\tau, \beta, \gamma}(a, \lambda - \alpha; c, \lambda; rx^{-\gamma}).$$