Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Вирченко, О некоторых композиционных соотношениях для операторов с обобщенной конфлюэнтной гипергеометрической функцией, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:35:22

$$\delta_u'(y) + K_1(y)\delta_u(y) = H_1(y), \quad (11)$$

где $K_1(y) = -\frac{1}{K(y)}$, $H_1(y) = -\frac{H(y)}{K(y)}$. Из представления функции $K(y)$ видно, что $K(y) \neq 0$ при выполнении условия (6).

Из условия (4) для нахождения $\delta_u(y)$ получим задачу Коши

$$\delta_u(0) = \delta_0 \quad (12)$$

для уравнения (11). Известно [3], что задача (11), (12) однозначно разрешима, когда $K_1(y)$, $H_1(y)$ непрерывные функции, то есть когда $K(y) \neq 0$. Следовательно, и решение задачи (1)–(4) определяется единственным образом. Нетрудно проверить, что функция $u(x, y)$, определяемая выражением (7), удовлетворяет краевым условиям (2)–(3). Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А. М. Нахушеву за ценные советы и внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения, 1976. — Т. 12, № 1. — С. 103–108.
2. Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения, 1982. — Т. 18, № 1. — С. 77–81.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — Т. 2. — М.: Наука, 1974. — 655 с.

Поступила 4.09.2006 г.

УДК 517.581

Н. А. Вирченко

О НЕКОТОРЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ОБОБЩЕННОЙ КОНФЛЮЭНТНОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

Рассмотрены интегральные операторы с функцией ${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}$, композиции с операторами дробного интегродифференцирования, с операторами типа потенциала и др.

1. Разнообразие задач, уравнений, порождающих специальные функции, ведет к заметному увеличению числа функций (от простейших трансцендентных к гипергеометрическим функциям разной природы). Следует подчеркнуть и большое значение специальных функций для теории и практического использования интегральных преобразований.

Непрерывное развитие математической физики, механики сплошной среды, квантовой механики, аэродинамики, теории вероятностей, астрофизики и др. вызывает введение новых специальных функций [1].

Введем (τ, β) -обобщенную конфлюэнтную гипергеометрическую функцию

$${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} \times {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (c; \tau); \\ (c; \beta); \end{matrix} \middle| zt^\tau \right] dt, \quad (1)$$

где $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$; $\tau \in \mathbb{I}$, $\tau > 0$; $\beta \in \mathbb{I}$, $\beta > 0$; ${}_1\Psi_1$ — функция Фокса–Райта [2]. Если в (1) положить $\beta = \tau$, то получим ${}_1\Phi_1^{\tau}(z)$ [3]. При $\tau = \beta = 1$ имеем классическую конфлюэнтную гипергеометрическую функцию $\Phi(a; c; z)$ [2].

ЛЕММА 1. Если $\alpha, \lambda \in \mathbb{E}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$; $r \in \mathbb{E}$; $\gamma > 0$; $\tau \in \mathbb{I}$, $\tau > 0$; $\beta \in \mathbb{I}$, $\beta > 0$; $\beta - \tau > -1$, то справедливо следующее композиционное соотношение

$$I_{0+}^{\alpha} \left(t^{\lambda-1} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; rt^{\gamma}) \right) (x) = x^{\lambda+\alpha-1} {}_2\Phi_2^{\tau, \beta, \gamma}(a, \lambda; c, \lambda + \alpha; rx^{\gamma}).$$

ЛЕММА 2. Если $\alpha, \lambda \in \mathbb{E}$, $\operatorname{Re} \lambda > \operatorname{Re} \alpha > 0$; $r \in \mathbb{E}$; $\gamma > 0$; $\tau \in \mathbb{I}$, $\tau > 0$; $\beta \in \mathbb{I}$, $\beta > 0$; $\beta - \tau > -1$, то справедливо следующее композиционное соотношение

$$I_{0-}^{\alpha} \left(t^{-\lambda} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; rt^{-\gamma}) \right) (x) = x^{\alpha-\lambda} {}_2\Phi_2^{\tau, \beta, \gamma}(a, \lambda - \alpha; c, \lambda; rx^{-\gamma}).$$

Здесь I_{0+}^{α} , I_{0-}^{α} — операторы дробного интегрирования [4]; ${}_2\Phi_2^{\tau, \beta, \gamma}$ — обобщенная (за Райтом) гипергеометрическая функция.

Определим интегральное преобразование с τ -обобщенной гипергеометрической функцией ${}_1\Phi_1^{\tau}(a; c; -xt)$ в следующем виде:

$$({}_{\tau}F_c^a f)(x) = \int_0^{\infty} t^{\frac{a}{\tau}-1} {}_1\Phi_1^{\tau}(a; c; -xt) f(t) dt,$$

где $c > a > 0$; $x > 0$; $\tau \in \mathbb{I}$, $\tau > 0$; $f(x) \in L_p$; $0 < \frac{1}{\tau} \leq 1$; $a > \frac{1}{p}$.

ЛЕММА 3. Если условия существования ${}_{\tau}F_c^a f$ выполняются, то справедливо следующее композиционное соотношение

$$\left({}_{\tau}I_{\frac{2}{p}-1, \frac{2}{p}}^{c-a} {}_{\tau}M_p^a f \right)(x) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} \tau x^{\frac{c-1}{\tau}-c+a} ({}_{\tau}F_c^a f)(x),$$

где ${}_{\tau}I_{\nu, \beta}^a$ — дробный оператор типа Эрдейи–Кобера [4]; ${}_{\nu}M_p^a$ — оператор модифицированного преобразования Лапласа

$$({}_{\tau}M_p^a f)(x) = x^{\frac{a}{\tau}-\frac{2}{p}} \int_0^{\infty} t^{\frac{a}{\tau}-1} e^{-xt} f(t) dt.$$

2. Обобщение оператора Кратцеля [5] дадим в следующей форме:

$$(\mathcal{R}_p^{\nu} f)(x) = \int_0^{\infty} \mathcal{Z}_p^{\nu}(xt) f(t) dt,$$

где

$$\mathcal{Z}_p^{\nu}(u) = \int_0^{\infty} r^{\nu-1} e^{-r^p} {}_1\Phi_1^{\tau}\left(a; c; -\frac{tu}{r^{\gamma}}\right) dr;$$

$\rho > 0$; $\nu \in \mathbb{F}$; $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$; $\tau \in \mathbb{I}$, $\tau > 0$; $\gamma > 0$.

ЛЕММА 4. Если $\rho > 0$; $\nu \in \mathbb{F}$; $\alpha \in \mathbb{F}$; $\operatorname{Re} a > 0$; функция $f(t)$ — локально интегрируема на $(0, \infty)$; I_{-}^{α} — оператор дробного интегрирования, то справедливо следующее композиционное соотношение

$$(I_{-}^{\alpha} \mathcal{R}_p^{\nu} f)(x) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-\tau\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(c-\tau\alpha)} \mathcal{R}_p^{\nu+\gamma\alpha} x^{-\alpha} f.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Kilbas A. A., Saigo M. H-Transform. — Charman and Hall/CRC., 2004. — 390 p.
2. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions. Vol.1 — N.-Y.: McGraw-Hill Book Company, 1953. — 300 p.
3. Virchenko N. O. On some generalizations of gamma functions // Доп. НАН України, 1999. — № 10. — С. 39–44.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
5. Kratzel E. General functions and operational calculus. — Varna, 1975. — P. 148–155.

Поступила 24.10.2006 г.