Общероссийский математический портал

Ю. И. Кадашевич, А. М. Пейсахов, С. П. Помыткин, Описание эффекта Портевена–Лешателье в рамках эндохронной теории неупругости при конечных деформациях, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu473>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 03:48:59

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.374

Ю. И. Кадашевич, А. М. Пейсахов, С. П. Помыткин

ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТА ПОРТЕВЕНА–ЛЕШАТЕЛЬЕ В РАМКАХ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ НЕУПРУГОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

С помощью уравнений эндохронной теории неупругости, учитывающей конечные деформации, предлагается подход к описанию одного из эффектов неупругого поведения материалов.

В работе [1] авторами был предложен новый подход к описанию конечных деформаций в рамках эндохронной теории неупругости. В предлагаемой работе рассматривается один из неупругих эффектов второго порядка, носящий имя Портевена и ЛеШателье [2].

Напомним, что суть эффекта Портевена–ЛеШателье состоит в том, что появляются скачки нагрузки в условиях деформирования материала в жестких испытательных машинах. Описание этого явления неустойчивости пластического течения может быть реализовано в рамках эндохронной теории неупругости, предложенной в [1].

Рассматривается один из вариантов теории [1] в форме [3]:

$$\begin{aligned} \alpha \tau^* \sigma + \sigma \otimes \varepsilon &= 2G \left(\tau^* + \frac{r}{g + \alpha} \otimes \varepsilon \right), \\ \varepsilon^* &= D, \quad \Omega = Q Q^T, \\ \varepsilon + \varepsilon \Omega - \Omega \varepsilon &= \varepsilon^*, \quad \sigma + \sigma \Omega - \Omega \sigma = \sigma^*, \\ r &= \varepsilon - (1 - \alpha) \frac{\sigma}{2G} \otimes \varepsilon = \sqrt{\frac{dr}{dt} : \frac{dr}{dt}}. \end{aligned} \quad (1)$$

В простейшем случае, когда параметр эндохронности $\alpha = 1$, уравнения (1) преобразуются в

$$\tau^* \sigma + D \otimes \sigma = 2G \left(\tau D + \frac{1}{g + 1} |D| \varepsilon \right), \quad |D| = \sqrt{D : D}. \quad (2)$$

В соотношения (2) в безындexсной форме записи входят: τ — аналог деформационного предела текучести; σ , ε — девиаторы тензоров напряжений и деформаций; G — модуль сдвига; g — аналог коэффициента упрочнения; Q — ортогональный тензор поворота; Ω — тензор спина; D — тензор скоростей деформаций. Кроме того, здесь используется, что

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{K}, \quad D = \frac{L + L^T}{2}, \quad L = F F^{-1}, \quad Q = F u^{-1},$$

где K — объемный модуль, F — градиент деформаций, L — скорость градиента деформаций; u — правый тензор удлинения в полярном разложении градиента деформаций $F = Qu$.

Предположим, что градиент деформаций имеет следующую структуру (в работе [3] $m = 0$):

$$F = \begin{pmatrix} a_1 & mb & 0 \\ b & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = a_1 a_2 - mb^2, \quad F^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_2 & -mb & 0 \\ -b & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta}{a_3} \end{pmatrix}.$$

Тогда ортогональный тензор поворота имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что в этом случае

$$\varepsilon_1 a_2 - mb b \varepsilon = \Delta \cdot D_{11}, \quad \varepsilon_2 a_1 - mb b \varepsilon = \Delta \cdot D_{22}, \quad b(a_2 + m a_1) - b(\varepsilon_2 + m \varepsilon_1) = 2 \cdot \Delta \cdot D_{12}.$$

Кроме того, $\tan \beta = \frac{b(m-1)}{a_1 + a_2}$.

Можно показать тогда, что

$$\Omega = \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а уравнение $\dot{\varepsilon}^* = D$ имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_{11} - 2\beta \dot{\varepsilon}_{12} = D_{11}, \quad \dot{\varepsilon}_{12} + 2\beta \dot{\varepsilon}_{11} = D_{12}.$$

Рассмотрим жесткое нагружение, когда $D_{11} = 0$, $D_{12} = 1$. Определяющие соотношения (2) рассмотрим в виде ($2G = 1$):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11} - 2\beta \dot{\varepsilon}_{12} + |D| \frac{\sigma_{11}}{\tau} &= D_{11} + \frac{1}{g+1} \frac{|D|}{\tau} \varepsilon_{11}, \\ \dot{\varepsilon}_{12} - 2\beta \dot{\varepsilon}_{11} + |D| \frac{\sigma_{12}}{\tau} &= D_{12} + \frac{1}{g+1} \frac{|D|}{\tau} \varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда

$$\beta = \frac{l^2 + 1}{l^2 - 1} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{1-l^2}{2l} \sin \frac{2l}{1-l^2} t \right]^2},$$

где $m = -l^2$, $\tau = -\frac{1}{2\beta}$.

Решение уравнений (3) для случая, когда $g = \infty$ и $l = 0,8$, приведено на рисунке. Четко видно, что при $m \approx -1$ реализуется эффект Портевена–ЛеШателье.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кадашев Ю. И., Помяткин С. П. Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости // В сб.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. — Москва: КМК, 1998. — Вып. 59. — С. 72–76.
2. Portevin A., LeChatelier F. Sur un phenomene observe lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, 1923. — Vol. 176. — P. 507–510.
3. Кадашев Ю. И., Помяткин С. П. Об эндохронной теории пластичности при учете конечных деформаций // В сб.: Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства. — СПб., 2004. — С. 135–138.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00169).

Поступила 29.03.2006 г.