Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Степанов, Исследование сходимости решения уравнений Фредгольма в упругопластических задачах механики разрушения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 186–188

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:35:59

Р и с. 4. Ниспадающая ветвь, продолженная аппроксимацией

Р и с. 5. Кривые упрочнения при растяжении отожженного алюминия с диаметром зерна $d_3 = 150$ мкм или температуре $+22$ °С с учетом частичного разрушения материала

испытаний плоских образцов), определяем пластические константы разрушения E_{**} , E_* , W_{**} , W_* .

На отрезке времени, когда $l \in [l_{**}; l_*]$, появляется еще одна эффективная характеристика: ширина $r_{ef} = r - r_{tr}$, где r — текущая половина ширины пластины; r_{tr} — половина ширины трещины. При $l = l_{**}$ имеем $r_{ef} = r_{**} = r$, а при $l = l_*$ — $r_{ef} = 0$.

Соответственно эффективная площадь поперечного сечения пластины принимает значение: $F_{ef} = 1 \cdot 2 \cdot r_{ef} = 1 \cdot 2 \cdot (r - r_{tr})$.

Сделаем перерасчет кривой упрочнения относительно эффективной площади: так как $F_{ef} \rightarrow 0$, а напряжение течения вычисляется по формуле $\sigma_s = \frac{P}{F_{ef}}$, то при данном деформирующем усилии P напряжение течения σ_s будет не уменьшаться, а увеличиваться.

Соответственно получаем график представленный на рис. 5 (или рис. 1, в).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. И., Козлова О. В. Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения. — Владивосток: Дальнаука, 2005. — 159 с.
2. Пластические константы разрушения: Учеб. пособие / О. В. Козлова, А. П. Наумкин, А. И. Хромов, С. А. Шамрай. — Комсомольск-на-Амуре: КнАГТУ, 2005. — 52 с.

Поступила 5.07.2006 г.

УДК 539.3

С. Л. Степанов

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Рассматриваются вопросы разрешимости и сходимости решения неоднородных уравнений Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром, возникающих в задачах механики разрушения при моделировании пластических эффектов у вершин трещин с использованием подходов теории жесткопластического тела.

Для плоского напряженного состояния известно модельное представление пластических областей у вершин трещины как узких, вытянутых вдоль линии трещины зон, в которых действуют постоянные напряжения, равные пределу текучести $p(x) = \sigma_s$. Такое модельное представление называется моделью Леонова–Панасюка–Дагдейла или КРТ–моделью (КРТ — критическое раскрытие трещины). Использование в задачах механики разрушения для сквозных и несквозных трещин (царапин) некоторых решений теории жесткопластического тела приводит к граничным условиям, в которых в пластических зонах и на контуре трещины вместо известного распределения напряжений $p(x) = \sigma(x)$ задается связь между напряжениями в пластических зонах и на берегах трещины и смещениями этих берегов в виде:

$$p(x) = A(1 - B \cdot v(x)), \quad (1)$$

где $v(x)$ — смещения, A и B — некоторые постоянные, определяемые геометрическими параметрами задачи, механическими характеристиками материала и критериями разрушения (см. [1]).

В свою очередь при использовании уравнения (1) в качестве граничных условий на контуре трещины и в пластических зонах $-c \leq x \leq c$ или на его части $a \leq x \leq b$, соответствующая краевая задача сводится к неоднородному интегральному уравнению Фредгольма относительно смещений:

$$v(x) - \lambda \frac{1}{h} \int_{-c}^c v(\xi) \Gamma(c, x, \xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq c. \quad (2)$$

Значение параметра c , характеризующего длину пластических зон, определяется из условия плавного смыкания их берегов: $v'(c) = 0$.

В уравнении (2) правая часть $f(x)$ является известной функцией внешней нагрузки, геометрических параметров трещины и механических характеристик материала, h — толщина материала. Параметр λ зависит от модуля упругости и предела текучести материала, а также от предельных значений выбранного критерия разрушения, $\lambda = \lambda(A, B)$. В нашем случае использования схемы жесткопластического течения таким критерием является относительная объемная плотность энергии диссипации, получаемой частицей материала при пересечении ею линии скольжения, введенная в [2]. Имеющиеся экспериментальные результаты позволяют сделать вывод о том, что для большинства металлических материалов величина λ находится в пределах 0,002 ... 0,003.

Ядро $\Gamma(c, x, \xi)$ уравнения (2) определяется в виде

$$\Gamma(c, x, \xi) = \ln \frac{c^2 - x\xi + \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - \xi^2)}}{c^2 - x\xi - \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - \xi^2)}} \quad (3)$$

и имеет логарифмическую особенность при $\xi \rightarrow x$.

При решении интегральных уравнений вида (2) с ядрами, имеющими слабую особенность, основными вопросами являются разрешимость этих неоднородных уравнений и сходимость их решения.

Согласно первой теореме Фредгольма, уравнение (2) имеет решение при любой правой части $f(x)$, поскольку соответствующее однородное уравнение не имеет решений, отличных от тривиального нулевого. Действительно, равенство нулю правой части в (2) означает отсутствие нагрузок, действующих на контур трещины и в пластических зонах, что сразу же позволяет сделать вывод о справедливости для однородного уравнения тождества $v(x) \equiv 0$.

Таким образом, решение уравнения (2) можно представить в виде ряда (см., например, [3,4])

$$v(x) = v_0(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \dots \quad (4)$$

и оценить его сходимость. Ряд (4) можно записать в другой форме:

$$v(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{h} \right)^n \int_{-c}^c \Gamma_n(c, x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad |x| \leq c. \quad (5)$$

Здесь $\Gamma_n(c, x, \xi)$ — n -ное итерированное ядро по отношению к исходному. Оно определяется следующим рекуррентным соотношением:

$$\Gamma_1(c, x, \xi) = \Gamma(c, x, \xi); \quad \Gamma_n(c, x, \xi) = \int_{-c}^c \Gamma_{n-1}(c, x, \tau) \Gamma(c, \tau, \xi) d\tau. \quad (6)$$

В [3] доказывается следующая теорема: *если ядро $\Gamma(c, x, \xi)$ нормируемо при всех значениях x из области изменения этой переменной $-c \leq x \leq c$, т. е. если*

$$\int_{-c}^c |\Gamma(c, x, \xi)|^2 d\xi \leq C, \quad (7)$$

где C — ограниченная величина, то ряд (5), а равно и (4), равномерно сходится при всех значениях λ/h , лежащих внутри интервала

$$\left| \frac{\lambda}{h} \right| \leq \frac{1}{B}; \quad B^2 = \int_{-c}^c \int_{-c}^c |\Gamma(c, x, \xi)|^2 d\xi dx. \quad (8)$$

Таким образом, для сходимости решения уравнения (2) необходимо показать, что условие (7) выполняется для ядра, определяемого формулой (3). Имеем

$$J(x) = \int_{-c}^c \left| \ln \frac{c^2 - x\xi + \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - \xi^2)}}{c^2 - x\xi - \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - \xi^2)}} \right|^2 d\xi, \quad |x| \leq c. \quad (9)$$

Сделав замену переменных $t = x/c$; $\varphi = \xi/c$, представим $J(x)$ следующим образом:

$$J(t) = c \int_{-1}^1 \left| \ln \frac{1 - t\varphi + \sqrt{(1 - t^2)(1 - \varphi^2)}}{1 - t\varphi - \sqrt{(1 - t^2)(1 - \varphi^2)}} \right|^2 d\varphi = c \int_{-1}^1 |\Gamma(1, t, \varphi)| \cdot |\Gamma(1, t, \varphi)| d\varphi. \quad (10)$$

Используя в (10) интегрирование по частям и проводя необходимые преобразования, для $J(t)$ получим следующее выражение:

$$J(t) = (\varphi - t) \Gamma^2(1, t, \varphi) + 4\sqrt{1 - t^2} \int_{-1}^1 \Gamma(1, t, \varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varphi^2}}. \quad (11)$$

Здесь первое слагаемое является регулярной функцией, поскольку

$$\lim_{\varphi \rightarrow t} (\varphi - t) \Gamma^2(1, t, \varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow t} \frac{\Gamma^2(1, t, \varphi)}{\frac{1}{\varphi - t}} = -4\sqrt{1 - t^2} \lim_{\varphi \rightarrow t} \frac{(\varphi - t) \cdot \Gamma(1, t, \varphi)}{\sqrt{1 - t^2}} = 0.$$

Во втором слагаемом интеграл приводится к виду

$$\begin{aligned} \int \Gamma(1, t, \varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varphi^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} \left[(\varphi - t) \cdot \Gamma(1, t, \varphi) + 2\sqrt{1 - t^2} \arcsin \varphi \right] - \\ &- \int \frac{\varphi \left[(\varphi - t) \cdot \Gamma(1, t, \varphi) + 2\sqrt{1 - t^2} \arcsin \varphi \right] d\varphi}{(1 - \varphi)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко видеть, что в этом выражении первое слагаемое является регулярной функцией и, соответственно, подынтегральное выражение второго слагаемого также регулярно при $\varphi \rightarrow t$, поэтому вычисление интеграла в (12) не вызывает затруднений.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о нормируемости ядра $\Gamma(c, x, \xi)$ с нормой C :

$$C = \max J(t),$$

которую можно определить по формулам (11), (12). Отсюда следует сходимость решения уравнения Фредгольма в виде ряда (5). В свою очередь условие сходимости запишется следующим образом:

$$\frac{\lambda}{h} \leq \frac{1}{B}; \quad B = c J(t) = c \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\Gamma(1, t, \varphi)|^2 d\varphi dt \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Таким образом, установлена разрешимость неоднородного уравнения Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром, доказана сходимость его решения и определено условие сходимости в упругопластических задачах механики разрушения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Быковцев Г. И., Лукашев Л. Г., Степанов С. Л. Об одной модели разрушения в идеальных упругопластических средах // Проблемы прочности, 1982. — № 3. — С. 72–75.
2. Хромов А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. — Владивосток: Дальнаука, 1996. — 181 с.
3. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1947. — 304 с.
4. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. — М.: Наука, 1977. — 311 с.

Поступила 7.11.2006 г.