Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Абрамов, Математическое моделирование движения малых тел солнечной системы на основе методов Адамса, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 192–194

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 03:47:30

В. В. Абрамов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ ТЕЛ
СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ АДАМСА

Рассмотрены методы Адамса численного интегрирования дифференциальных уравнений. Проведено исследование эволюции орбиты астероида 99942 Apophis на интервале времени с 1800 по 2206 гг., определены моменты его сближений с другими небесными телами. Результаты вычислений хорошо согласуются с исследованиями, проводимыми в нашей стране и за рубежом.

В данной работе проводилось исследование многошаговых методов Адамса, на основе которых осуществлялось математическое моделирование движения небесных тел Солнечной системы.

Методы Адамса относятся к числу наиболее экономичных методов, так как при одинаковой точности на одном шаге численного интегрирования требуется меньшее количество вычислений правых частей дифференциальных уравнений по сравнению с одношаговыми методами. Также несомненным достоинством методов Адамса является их универсальность, то есть они могут быть применены для решения широкого класса задач, описываемых дифференциальными уравнениями. Следовательно, усложнение математической модели в результате учёта дополнительных факторов, таких как релятивистские эффекты и несферичность тел, приводящие к изменению дифференциальных уравнений, не потребует изменения самого алгоритма численного интегрирования.

Общая форма записи многошаговых методов имеет вид [1]

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}), \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K} . \quad (1)$$

Если $\alpha_k = 1$, $\alpha_{k-1} = -1$, $\alpha_{k-2} = \mathbf{K} = \alpha_0 = 0$, то выражение (1) представляет собой общую форму записи методов Адамса.

Из формулы (1) следует, что для вычисления значений y_n необходимо сначала получить k начальных значений $y_0, y_1, \mathbf{K}, y_{k-1}$. При $\beta_k = 0$ метод (1) называется явным многошаговым методом. При $\beta_k \neq 0$ правая часть (1) содержит $f(x_{n+k}, y_{n+k})$, и необходимо решать нелинейное уравнение относительно y_{n+k} : метод (1) в этом случае называется неявным многошаговым методом.

Например, выражение

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{60480} (198721f_n - 447288f_{n-1} + 705549f_{n-2} - 688256f_{n-3} + 407139f_{n-4} - 134472f_{n-5} + 19087f_{n-6})$$

представляет собой формулу метода Адамса–Бэшфорта 6-го порядка, а выражение

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{60480} (19087f_{n+1} + 65112f_n - 46461f_{n-1} + 37504f_{n-2} - 20211f_{n-3} + 6312f_{n-4} - 863f_{n-5})$$

является формулой метода Адамса–Мултона 6-го порядка.

Явные методы Адамса–Бэшфорта значительно проще неявных методов Адамса–Мултона, однако неявные методы являются более точными, поэтому они являются более предпочтительными для решения практических задач. При этом требуется решать нелинейное уравнение, например с помощью итерационного процесса – метода прогноза и коррекции:

$$P: \quad y_{n+1}^{(0)} = y_n + h \sum_{i=0}^k B_i f(x_{n-i}, y_{n-i});$$

$$E: \quad f_{n+1}^{(1)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)});$$

$$C: \quad y_{n+1}^{(1)} = y_n + h M_0 f_{n+1}^{(1)} + h \sum_{i=1}^k M_i f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i});$$

LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL

$$\begin{aligned}
E: \quad & f_{n+1}^{(v)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(v-1)}); \\
C: \quad & y_{n+1}^{(v)} = y_n + h M_0 f_{n+1}^{(v)} + h \sum_{i=1}^k M_i f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i}) = y_{n+1}; \\
E: \quad & f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}).
\end{aligned} \tag{2}$$

В данном методе в качестве начального приближения используется значение, полученное по формуле метода Адамса–Бэшфорта, а дальнейшие уточнения производятся с помощью метода Адамса–Мултона [1]. Итерационный процесс $P(EC)^v E$ в методе (2) выполняется либо фиксированное число раз, либо до тех пор, пока не будет достигнута сходимость.

В настоящей работе исследование движения небесных тел проводилось в экваториальной барицентрической системе координат. Дифференциальные уравнения движения с учётом релятивистских эффектов имеют вид [2]

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \gamma \frac{v_i^2}{c^2} + (1 + \gamma) \frac{v_j^2}{c^2} - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j - \right. \\
\left. - \frac{3}{2c^2} \left[\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j \right\} + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \left\{ \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right] \times \left[(2 + 2\gamma) \dot{\mathbf{r}}_i - (1 + 2\gamma) \dot{\mathbf{r}}_j \right] \right\} \times \\
\times (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь r_i , $\dot{\mathbf{r}}_i$, $\ddot{\mathbf{r}}_i$ — координаты, скорость, ускорение в барицентрической системе координат i -того возмущаемого тела; r_j , $\dot{\mathbf{r}}_j$, $\ddot{\mathbf{r}}_j$ — координаты, скорость, ускорение в барицентрической системе координат j -го возмущающего тела; $\mu_j = k^2 m_j$, где k^2 — гравитационная постоянная и m_j — масса j -того тела; $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$, β и γ — релятивистские параметры; $\beta = \gamma = 1$; $v_i = |\dot{\mathbf{r}}_i|$ и c — скорость света.

Начальные данные координат и скоростей больших планет, Луны и Солнца были взяты из банка данных координат и скоростей этих объектов, описанного в работе [3] и согласованного с базой данных координат и скоростей в DE 405 [4]. Закладка начальных данных координат и скоростей больших планет проводилась с помощью одношагового метода Эверхарта [5] по программе RADA-27 [6].

Т а б л и ц а 1

Сближения астероида 99942 Apophis с Землёй и Луной

Объект	Дата	Время	а. е.	км
Земля	13.04.1823	23:50:12	0,007648	1144158
Луна	14.04.1823	07:09:07	0,008391	1255234
Луна	13.04.1866	18:10:56	0,014404	2154828
Земля	13.04.1866	19:26:58	0,015762	2358005
Земля	13.04.2029	21:46:22	0,000258	38618
Луна	14.04.2029	14:35:31	0,000631	94437
Луна	13.04.2066	15:57:53	0,001120	167605
Земля	14.04.2066	01:35:36	0,002995	448113
Луна	12.04.2085	22:43:58	0,007848	1174026
Земля	13.04.2085	04:42:14	0,009351	1398892
Луна	28.09.2117	07:35:36	0,012682	1897199
Земля	28.09.2117	19:10:50	0,012474	1866059
Луна	29.09.2127	00:24:46	0,012212	1826944
Земля	29.09.2127	01:38:29	0,011941	1786292
Земля	28.09.2137	17:56:32	0,011831	1769913
Луна	29.09.2137	11:49:37	0,011214	1677585
Земля	16.04.2156	07:54:37	0,012148	1817373
Луна	16.04.2156	10:14:35	0,010904	1631192

С помощью метода Адамса–Мултона было проведено исследование эволюции орбиты астероида 99942 Апофис на интервале времени с 1800 по 2206 гг. В табл. 1 приведены все сближения данного астероида с Землёй и Луной на расстояние менее 0,02 а. е. на исследуемом интервале времени. Расстояние от астероида до центра Земли или Луны в момент сближения указано в астрономических единицах и километрах.

Как видно из табл. 1, минимальное сближение с Землёй произойдёт 13 апреля 2029 года в 21:46 по всемирному времени на геоцентрическом расстоянии 0,000258 а. е., что составляет примерно 38 тыс. км или 5 земных радиусов от поверхности нашей планеты. Спустя 17 часов Апофис пройдёт на минимальном расстоянии от центра Луны, которое составит 0,000631 а. е. или примерно 94 тыс. км. Данные результаты очень хорошо согласуются с исследованиями, проводимыми как в нашей стране, так и за рубежом.

В табл. 2 представлены все элементы орбиты астероида Апофис кроме средней аномалии M для некоторых моментов времени. Таким образом, табл. 2 показывает эволюцию орбиты этого малого тела на исследуемом временном интервале.

Т а б л и ц а 2

Элементы орбиты астероида 99942 Apophis

Дата	a	e	ω	Ω	i
05.01.1800	0,934664	0,188071	116,5963	211,4251	3,118633
11.05.1823	0,929381	0,189654	119,0503	210,4626	3,266028
09.05.1866	0,926224	0,190483	121,2233	209,0425	3,293669
16.03.2029	0,922299	0,191267	126,7488	203,8120	3,348612
11.05.2029	1,100632	0,188382	72,10625	203,5068	2,252664
17.03.2066	1,101449	0,188610	72,83814	202,7343	2,273405
11.05.2066	1,077099	0,183010	79,15851	202,5629	2,183697
09.05.2085	1,069004	0,181526	81,41254	202,2513	2,183262
25.10.2117	1,072704	0,181895	83,22313	200,7233	2,302441
26.10.2127	1,072770	0,181590	84,41660	199,5995	2,437007
26.10.2137	1,073652	0,181248	85,69574	198,6057	2,571903
13.05.2156	1,068532	0,180517	87,90469	198,2243	2,524838
05.08.2206	1,067732	0,180361	89,06481	197,5835	2,526403

Из табл. 2 видно, что до максимального сближения с Землёй в 2029 году астероид Апофис принадлежит к группе Атона, так как его большая полуось $a < 1$, а после этого сближения орбита астероида резко изменит свою форму, и он перейдёт в группу Аполлона ($a > 1$). Остальные сближения не приводят к кардинальным изменениям элементов орбиты.

Отклонения координат небесных тел, полученных в результате численного интегрирования уравнений движения (3) с помощью метода Адамса–Мултона 11 порядка с шагом 0,25 дня и модифицированного метода Эверхарта 27 порядка с шагом 1 день, очень малы и находятся в пределах точности оптических наблюдений. При этом вычисления с помощью метода прогноза и коррекции производятся примерно в четыре раза быстрее, чем с помощью метода Эверхарта. Данные результаты указывают на высокую эффективность методов Адамса при исследовании движения небесных тел на длительных интервалах времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1979. — 312 с.
2. Newhall X. X., Standish E. M. Jr., Williams J. G. DE 102: a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries// Astron. and Astrophys., 1983. — No. 125. — P. 150–167.
3. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А. Каталог орбитальной эволюции короткопериодических комет с 1900 по 2100 гг. — М.: Машиностроение-1, 2005. — 346 с.
4. Standish E. M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE 405 / LE 405// Jet Prop Lab Technical Report. IOM 312. F-048. 1998. — P. 1–7.
5. Everhart E. Implicit single methods for integrating orbits// Celestial Mech., 1974. — No. 10. — P. 35–55.
6. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А., Ольхин А. Г. Применение метода Эверхарта 31 порядка для решения уравнений движения больших планет// ВАН-2004. Горизонты Вселенной: Тез. докл. на Всерос. астрономич. конф. — М.: МГУ, ГАИШ, 2004. — С. 209.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП. 2.1.1.1689).

Поступила 19.09.2006 г.