Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Попов, Нелинейная стохастическая задача ползучести толстостенной сферической оболочки, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000, выпуск 9, 186–189

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu48>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:44:56

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.376

Н.Н.Попов

НЕЛИНЕЙНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПОЛЗУЧЕСТИ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается задача о ползучести стохастически неоднородной сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления. Стохастические неоднородности материала описываются при помощи случайной функции одной переменной. Определяющее соотношение ползучести выбрано в виде нелинейной теории вязкого течения. Применяется метод разложения по малому параметру, при котором учитываются не только линейные, но и квадратичные члены. Произведено сравнение результатов работы с результатами, полученными по линейной модели.

Трудности интегрирования стохастических уравнений механики деформируемого твердого тела связаны с их физической и статистической нелинейностью. В работах [1,2] развивается метод малого параметра, позволяющий свести статистически нелинейную задачу к последовательности статистически линейных задач. Однако этот подход связан с трудностями вычислительного характера, поэтому при решении конкретных задач обычно ограничиваются первым приближением, которое справедливо для слабонеоднородных тел.

В данной работе на основе второго приближения метода малого параметра приводится решение задачи о ползучести стохастически неоднородной сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления. Аналогичная задача по первому приближению рассматривалась в [3].

Будем предполагать, что материал оболочки несжимаем, мгновенными деформациями допустимо пренебречь, а деформации ползучести описываются уравнениями вязкого течения, которые в сферических координатах имеют вид [3]

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_r &= -\frac{2}{3}c(\sigma_\varphi - \sigma_r)^n [1 + \alpha U(r)]; \\ \dot{\varepsilon}_\varphi = \dot{\varepsilon}_\psi &= \frac{1}{3}c(\sigma_\varphi - \sigma_r)^n [1 + \alpha U(r)]\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\psi$ — компоненты тензора деформаций; σ_φ, σ_r — компоненты тензора напряжений; $U(r)$ — случайная функция, описывающая флуктуации механических свойств материала, статистические характеристики которой считаются известными, в частности, $\langle U \rangle = 0$, $\langle U^2 \rangle = 1$; α — число, играющее роль коэффициента вариации механических свойств; c, n — постоянные материала.

К определяющим соотношениям (1) необходимо присоединить уравнение равновесия

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} - 2(\sigma_\varphi - \sigma_r) = 0, \quad (2)$$

условие совместности деформаций

$$r \frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{dr} + \dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{\varepsilon}_r = 0 \quad (3)$$

и граничные условия

$$\sigma_r(a) = -q, \quad \sigma(b) = 0, \quad (4)$$

где q — внутреннее давление, a и b — внутренний и наружный радиусы сферы.

Решение системы стохастических дифференциальных уравнений ползучести (1)-(3) может быть сведено к решению статистически нелинейного дифференциального уравнения второго порядка относительно радиального напряжения

$$r(1 + \alpha U)\sigma_r'' + \frac{n+3}{n}(1 + \alpha U)\sigma_r' + \frac{r\alpha U'\sigma_r'}{n} = 0, \quad (5)$$

где штрих означает дифференцирование по r .

Для приближенного решения этого уравнения используется метод разложения радиального напряжения σ_r по малому параметру α .

$$\sigma_r = \sigma_{r0} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \sigma_{rk}, \langle \sigma_r \rangle = \sigma_{r0}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (5) и пренебрегая членами, содержащими α^3 , можно получить

$$r\sigma_{r0}'' + \frac{n+3}{n}\sigma_{r0}' = 0; \quad (7)$$

$$r\sigma_{r1}'' + \frac{n+3}{n}\sigma_{r1}' = -\frac{r}{n}U'\sigma_{r0}' ; \quad (8)$$

$$r\sigma_{r2}'' + \frac{n+3}{n}\sigma_{r2}' = -\frac{r}{n}U'(\sigma_{r1}' - U\sigma_{r0}') . \quad (9)$$

Решения уравнений (7), (8) приведены в [3,4]:

$$\sigma_{r0} = A[1 - (b/r)^{3/n}], \quad A = \frac{qa^{3/n}}{b^{3/n} - a^{3/n}}; \quad (10)$$

$$\sigma_{r1} = \frac{3Ab^{3/n}}{n^2} \left[-I(r) - Br^{-3/n} + Ba^{-3/n} \right], \quad (11)$$

где
$$I(r) = \int_a^r U(x)x^{-1-3/n}dx, \quad B = \frac{I(b)}{a^{-3/n} - b^{-3/n}} \cdot \sigma.$$

Уравнение (9) после подстановки известных производных σ_{r0}' и σ_{r1}' приводится к виду

$$r^{-3/n} \frac{d}{dr} (\sigma_{r2}' r^{1+3/n}) = \frac{3Ab^{3/n} r^{-3/n}}{n^3} [(1+n)U'U - \frac{3U'}{n}].$$

Интегрируя последнее уравнение при граничных условиях $\sigma_{r2}(a) = 0, \sigma_{r2}(b) = 0$, можно получить:

$$\sigma_{r2} = \frac{3Ab^{3/n}}{n^2} \left[\frac{1+n}{2n} J(r) - \frac{3BI(r)}{n^2} - Cr^{-3/n} + Ca^{-3/n} \right], \quad (12)$$

где
$$C = -\frac{1+n}{2n}P + \frac{3B^2}{n^2}; \quad J(r) = \int_a^r U^2(x)x^{-1-3/n}dx; \quad P = \frac{J(b)}{a^{-3/n} - b^{-3/n}}.$$

Таким образом, радиальное напряжение σ_r во втором приближении определяется формулами (10), (11), (12).

Теперь вычислим компоненту $\dot{\epsilon}_r$ скорости тензора деформаций во втором приближении и найдем ее дисперсию. Используя вытекающее из (2) соотношение

$$\sigma_\phi - \sigma_r = \frac{r}{2}\sigma_r',$$

второе определяющее соотношение (1) можно представить в виде

$$\dot{\epsilon}_r = C_1 A^n \left(\frac{b}{r} \right)^{3/n} \left(1 - \frac{\alpha U}{n} + \frac{3\alpha B}{n^2} + \frac{1+n}{2n^2} \alpha^2 U^2 - \frac{3\alpha^2 BU}{n^3} + \frac{\alpha^2 C}{n} \right)^n, \quad (13)$$

где
$$C_1 = \frac{3^{n-1} c^n}{2^{n-1} n^n}.$$

Разлагая степенную функцию в формуле (13) в ряд Тейлора по α и ограничиваясь членами второго порядка малости относительно α , получим

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= C_1 A^n \left(\frac{b}{r} \right)^{3/n} \left[1 - \alpha U + \frac{3\alpha B}{n} + \alpha^2 U^2 - \frac{3\alpha^2 UB}{n} + \alpha^2 C + \frac{9\alpha^2 B^2 (n-1)}{2n^3} \right] (1 + \alpha U) = \\ &= C_1 A^n \left(\frac{b}{r} \right)^{3/n} \left[1 + \frac{3\alpha B}{n} + \frac{1+n}{2n} \alpha^2 P + \frac{9n-6}{2n^3} \alpha^2 B^2 \right]. \end{aligned}$$

При вычислении дисперсии $\dot{\epsilon}_r$ будем считать, что случайная функция $U(r)$, описывающая стохастические свойства материала, распределена по нормальному закону. В этом случае, как известно [5], моменты нечетных порядков равны нулю, а моменты четных порядков выра-

жаются через моменты второго порядка. В частности, для момента четвертого порядка формула имеет вид

$$\langle X_1^0 X_2^0 X_3^0 X_4^0 \rangle = k_{12}k_{34} + k_{13}k_{24} + k_{14}k_{23}, \quad (14)$$

где X_i^0 - центрированные случайные величины, k_{ij} - моменты второго порядка.

Дисперсия случайной функции $\dot{\varepsilon}_r$, определяемая формулой

$$D\dot{\varepsilon}_r = \langle \dot{\varepsilon}_r^2 \rangle - (\langle \dot{\varepsilon}_r \rangle)^2,$$

после несложных, но громоздких преобразований, с использованием формулы (14) приводится к виду

$$D\dot{\varepsilon}_r = C_1^2 A^{2n} \left(\frac{b}{r} \right)^{\frac{6}{n}} \left(\frac{9\alpha^2 \langle B^2 \rangle}{n^2} + \frac{3(15n-9)^2}{4n^6} \alpha^4 \langle B^2 \rangle \right),$$

где

$$\langle B^2 \rangle = \int_a^b \int_a^b K(x_1, x_2) x_1^{-1-\frac{3}{n}} x_2^{-1-\frac{3}{n}} dx_1 dx_2;$$

$K(x_1, x_2)$ – корреляционная функция случайной функции $U(x)$.

Очевидно, что $D\dot{\varepsilon}_r$ в первом приближении определяется формулой

$$D\dot{\varepsilon}_r = C_1^2 A^{2n} \left(\frac{b}{r} \right)^{\frac{6}{n}} \frac{9\alpha^2 \langle B^2 \rangle}{n^2}.$$

Для оценки относительной величины разброса скорости деформаций были вычислены значения коэффициента вариаций $\frac{\sqrt{D\dot{\varepsilon}_r}}{\langle \dot{\varepsilon}_r \rangle}$. При этом предполагалось, что корреляционная функция случайного поля микронеоднородностей U имеет вид

$$K(\rho) = e^{-10|\rho|} [\cos 20\rho + 0.5 \sin 20|\rho|]; \quad \rho = r_2 - r_1.$$

В таблице представлены значения коэффициента вариации $\frac{\sqrt{D\dot{\varepsilon}_r}}{\langle \dot{\varepsilon}_r \rangle}$ в зависимости от n и α

при $\alpha=1$, $b=2$; в первой строке приведены значения, вычисленные по первому приближению; во второй – по второму приближению. Как видно из таблицы, для слабонеоднородных материалов ($\alpha=0.1 - 0.2$) значения коэффициента вариации отличаются незначительно.

Значения коэффициента вариации $\frac{\sqrt{D\dot{\varepsilon}_r}}{\langle \dot{\varepsilon}_r \rangle}$

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
N						
1	0.0046 0.0048	0.0369 0.0413	0.1245 0.1581	0.2952 0.4368	0.5765 1.0089	0.9962 2.0721
2	0.0182 0.0186	0.0832 0.0909	0.2106 0.2542	0.4161 0.5690	0.7151 1.1257	1.1233 2.0521
3	0.0258 0.0261	0.1105 0.1164	0.2654 0.2972	0.5016 0.6086	0.8302 1.1070	1.2625 1.8685
5	0.0348 0.0350	0.1440 0.1474	0.3349 0.3524	0.6146 0.6717	0.9904 1.1342	1.4694 1.7766
7	0.0403 0.0404	0.1646 0.1667	0.3784 0.3892	0.6869 0.7220	1.0954 1.1831	1.6095 1.7948
9	0.0440 0.0441	0.1788 0.1802	0.4086 0.4160	0.7377 0.7615	1.1703 1.2293	1.7107 1.8349

Для материалов с большой степенью неоднородности ($\alpha=0.5 - 0.6$) значения коэффициента вариации, вычисленные по первому и второму приближениям, могут отличаться друг от друга в полтора – два раза. Поэтому в данном случае неучет второго приближения может привести к необоснованному завышению показателей прочности и надежности сферической оболочки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ломакин В.А.* Проблемы механики структурно-неоднородных тел // Изв. АН СССР. М. Т., 1978, N 6, С.45-52.
2. *Хорошун Л.П.* Задачи механики стохастически неоднородных деформируемых тел // Современные проблемы теоретической и прикладной механики. Киев: Наукова думка, 1978. С.372-385.
3. *Попов Н.Н.* Длительная прочность стохастически неоднородной сферической оболочки // Надежность и прочность машиностроительных конструкций. Куйбышев: КнГИ, 1988. С.55-60.
4. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455с.
5. *Свеишников А.А.* Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 464 с.