Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Данилкина, Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 5–9

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:31:32

Дифференциальные уравнения

УДК 517.95

О. Ю. Данилкина

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Исследуется разрешимость нелокальной задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности. Доказана теорема существования и единственности обобщенного решения.

Рассмотрим в области $Q_T = \{(x, t) : x \in (0, l), t \in (0, T)\}$ уравнение

$$u_t = u_{xx} + c(t)u + f(x, t). \quad (1)$$

Поставим для него задачу с начальным

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

граничным

$$u_x(0, t) = 0 \quad (3)$$

и нелокальным

$$\int_0^l K(x) u(x, t) dx = E(t) \quad (4)$$

условиями.

Нелокальные задачи активно изучаются в настоящее время. Среди исследований, посвященных нелокальным задачам с интегральными условиями, можно выделить работы [1–3].

В предлагаемой работе нелокальное условие (4) имеет вид операторного уравнения 1-го рода, что вызывает дополнительные трудности при изучении задачи (1)–(4). Более простым для исследования является случай, когда нелокальное условие содержит как интегральный оператор, так и значение функции на границе. В работе показано, что при определенных условиях можно перейти от задачи (1)–(3) с нелокальным условием (4) к задаче с нелокальным условием, имеющим вид операторного уравнения 2-го рода.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма. Пусть $c \in [0, T]$, причем $|c| \leq c_1$, $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in W_2^1(0, l)$, $K \in C^1[0, l]$, $E \in C^1[0, T]$.

Если выполняется условие согласования

$$E(0) = \int_0^l K(x) \varphi(x) dx, \quad (5)$$

то задача (1)–(4) эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + c(t)u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_x(0, t) = 0, \\ u_x(l, t) &= \int_0^l H(x) u_x(x, t) dx + F(t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } H(x) = \frac{K_x(x)}{K(l)}, \quad F(t) = \frac{E'(t) - c(t)E(t) - f_1}{K(l)}, \quad f_1(t) = \int_0^l Kf dx.$$

Доказательство. Действительно, из (1) следует, что

$$\int_0^l K(x)u_t dx = \int_0^l K(x)u_{xx} dx + \int_0^l K(x)c(t)u dx + \int_0^l K(x)f dx, \quad (7)$$

а тогда, если выполняется условие (4), то

$$E'(t) = K(l)u_x(l, t) + c(t)E(t) + f_1(t) - \int_0^l K_x u_x(x, t) dx. \quad (8)$$

Следовательно, условие (6) выполняется.

Рассмотрим теперь задачу (1)–(3), (6). Если условие (6) выполняется, то из него очевидным образом вытекает равенство (8). А тогда

$$E'(t) = \int_0^l K(x)u_{xx} dx + c(t)E(t) + \int_0^l K f dx.$$

В силу (7) получаем, что

$$E'(t) = \int_0^l K(x)u_t dx - \int_0^l K(x)c(t)u dx - \int_0^l K(x)f(x, t) dx + c(t)E(t) + \int_0^l K(x)f(x, t) dx.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \left(E(t) - \int_0^l K(x)u dx \right) = c(t) \left(E(t) - \int_0^l K(x)u dx \right).$$

Обозначим $v(t) = E(t) - \int_0^l K(x)u dx$. Тогда функция $v(t)$ может быть найдена как решение задачи Коши: $v'(t) = c(t)v(t)$, $v(0) = 0$. В силу наложенных на функцию $c(t)$ ограничений, единственным решением данной задачи является функция $v = 0$ [4], а значит и $E(t) - \int_0^l K(x)u dx = 0$.

Следовательно, $\int_0^l K(x)u dx = E(t)$. Лемма доказана.

Перейдем к изучению задачи (1)–(3), (6). Назовем функцию $u(x, t)$ обобщенным решением задачи (1)–(3), (6), если $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ и $\forall \eta \in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x, T) = 0$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (-u\eta_t + u_x\eta_x - cu\eta) dx dt = \int_{Q_T} f\eta dx dt + \int_0^l \varphi(x)\eta(x, 0) dx + \int_0^T \left(\int_0^l H(x)u_x(x, t) dx + F(t) \right) \eta(l, t) dt. \quad (9)$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполняются условия леммы. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3), (6).

Доказательство теоремы разобьем на две части.

1. Существование решения. Воспользуемся методом Галеркина. Рассмотрим систему функций $\{\psi_k(x)\} \in C^1[0, l]$, полную в $W_2^{1,0}(Q_T)$, такую, что

$$(\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Будем искать решение $u^N(x, t)$ в виде $u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t)\psi_k(x)$ из системы равенств

$$\begin{aligned} \int_0^l u_t^N(x, t)\psi_k(x) dx + \int_0^l u_x^N(x, t)(\psi_k)_x dx - \int_0^l c(t)u^N\psi_k(x) dx = \int_0^l f\psi_k(x) dx - \\ - \left(\int_0^l H(x)u_x(x, t) dx + F(t) \right) \psi_k(l), \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$c_k^N(0) = (\varphi, \psi_k). \quad (11)$$

Система (10) — это система N линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $c_k^N(t)$. Поскольку в (10) коэффициенты при $c_k^N(t)$ — ограниченные функции, а свободные члены суммируемы на $[0, T]$, то $c_k^N(t)$ однозначно определены как решение задачи Коши (10), (11) ([4], с. 27), причем $c_k^N(t) \in C^1[0, T]$.

Итак, мы построили последовательность $\{u^N\}$. Покажем, что она сходится к решению задачи (1)–(3), (6). Умножим каждое из (10) на свою функцию $\psi_k(x)$, просуммируем от 0 до N и проинтегрируем от 0 до $\tau < T$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l (u^N)^2 dx + \int_{Q_\tau} (u_x^N)^2 dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^l (u^N(x, 0))^2 dx + \int_{Q_\tau} c (u^N)^2 dx dt + \\ &+ \int_{Q_\tau} f u^N dx dt + \int_{Q_\tau} H(x) u_x^N u^N(l, t) dx dt + \int_{Q_\tau} F(t) u^N(l, t) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Для удобства временно опустим верхний индекс у u^N . Отметим, опираясь на [5], что $\forall u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ справедливо неравенство

$$u^2(l, t) \leq \int_0^l (\varepsilon u_x^2(x, t) + a(\varepsilon) u^2(x, t)) dx \quad (13)$$

для почти всех $t \in (0, T)$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное.

Применяя ε -неравенство и неравенство (13) для оценки слагаемых из правой части равенства (12), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx + \int_{Q_\tau} u_x^2 dx dt &\leq \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, 0) dx + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} f^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau F^2 dt + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} (\varepsilon u_x^2 + a(\varepsilon) u^2) dx dt + \\ &+ \frac{\delta}{2} H_0 \int_{Q_\tau} u_x^2 dx dt + \frac{a(\varepsilon_1)}{2\delta} H_0 \int_{Q_\tau} u^2 dx dt + \frac{\varepsilon_1}{2\delta} H_0 \int_{Q_\tau} u_x^2 dx dt + \left(c_1 + \frac{1}{2}\right) \int_{Q_\tau} u^2 dx dt, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\varepsilon, \varepsilon_1, \delta > 0$ — произвольные константы; $H_0 = \int_0^l H^2(x) dx$.

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{3}, \delta = \frac{1}{3H_0}, \varepsilon_1 = \frac{\delta}{3}$. Тогда (14) преобразуется в следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx + \int_{Q_\tau} u_x^2 dx dt &\leq \frac{1}{2} (1 + 2c_1 + a(\varepsilon) + 3H_0 a(\varepsilon_1)) \int_{Q_\tau} u^2 dx dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, 0) dx + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} f^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau F^2 dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим через $m = 1 + 2c_1 + a(\varepsilon) + 3H_0 a(\varepsilon_1)$, $G(\tau) = \int_0^l u^2(x, 0) dx + \int_{Q_\tau} f^2 dx dt + \int_0^\tau F^2 dt$.

Тогда из (15) следует

$$\int_0^l u^2 dx \leq m \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt + G(\tau). \quad (16)$$

Применим к (16) неравенство Гронуолла. Поскольку $G(\tau) \geq 0$, то получим

$$\int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt \geq \frac{G(\tau)}{m} (e^{m\tau} - 1).$$

Следовательно, используя (15), имеем

$$\int_{Q_\tau} u_x^2 dx dt \leq G(\tau) e^{m\tau}. \quad (17)$$

Таким образом, $|u|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M$, где величина M зависит от $l, T, K, c, E, u(x,0), f$ и не зависит от номера N ; $M=0$ при $f=0, F=0, u(x,0)=0$.

Итак, $|u^N|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M$. В силу этого из последовательности $\{u^N\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u^{N_k}\}$, слабо сходящуюся вместе с $\{u^{N_k}\}$ в $L_2(Q_T)$ к некоторой функции $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ при $k \rightarrow \infty$. Покажем, что эта функция $u(x,t)$ и есть обобщенное решение задачи (1)–(3), (6). Для этого возьмем произвольные абсолютно непрерывные функции $d_k(t)$ с $d_k'(t)$ из $L_2(0,T)$, $d_k(T)=0$. Умножим каждое из (10) на свою функцию $d_k(t)$, просуммируем от 1 до N и проинтегрируем от 0 до T . Обозначим через $\Phi^N(x,t) = \sum_{k=1}^N d_k(t) \psi_k(x)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (-u_t^{N_k} \Phi^{N_k} + u_x^{N_k} \Phi_x^{N_k} - cu^{N_k} \Phi^{N_k}) dx dt = \int_{Q_T} f \Phi^{N_k} dx dt + \int_0^l u \Phi^{N_k} \Big|_{t=0} dx + \int_0^T F(t) \Phi^{N_k}(l,t) dt + \\ + \int_0^T \int_0^l H(x) u_x^{N_k} dx \Phi^{N_k}(l,t) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

При переходе к пределу по выбранной подпоследовательности $\{u^{N_k}\}$ в равенстве (18) получим

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (-u_t^N \Phi^N + u_x^N \Phi_x^N - cu^N \Phi^N) dx dt = \int_{Q_T} f \Phi^N dx dt + \int_0^l u^N \Phi^N \Big|_{t=0} dx + \\ + \int_0^T \left(\int_0^l H(x) u_x^N dx + F(t) \right) \Phi^N(l,t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим семейство функций $\bigcup_{N=1}^{\infty} \Phi^N$. Отметим, что множество функций $\{\Phi^N\}$ из $\bigcup_{N=1}^{\infty} \Phi^N$ будет плотным в $W_2^1(Q_T)$ ([6], с. 106). Пусть функция $\eta(x,t)$ является пределом последовательности $\{\Phi^N\}$ из $\bigcup_{N=1}^{\infty} \Phi^N$ в норме $W_2^1(Q_T)$.

Рассмотрим отдельно последнее слагаемое в правой части в (19). Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left(\int_0^l H(x) u_x^n(x,t) dx + F(t) \right) \Phi^n(l,t) dt = \int_0^T \left(\int_0^l H(x) u_x(x,t) dx + F(t) \right) \eta(l,t) dt. \quad (20)$$

Обозначим $\int_0^l H(x) u_x(x,t) dx + F(t) = S(t)$. Тогда

$$\left| \int_0^T S(t) (\Phi^N(l,t) - \eta(l,t)) dt \right| \leq \int_0^T |S(t)| |\Phi^N(l,t) - \eta(l,t)| dt. \quad (21)$$

Отметим, что

$$|S(t)| = \left| \int_0^l H(x) u_x(x,t) dx + F(t) \right| \leq \left| \int_0^l H(x) u_x(x,t) dx \right| + |F(t)|.$$

Из неравенства (17) следует

$$\int_0^l u_x^2 dx \leq G'(\tau) e^{m\tau} + mG(\tau) e^{m\tau} \leq (G'(T) + mG(T)) e^{mT},$$

поэтому

$$\left(\int_0^l H(x) u_x(x, t) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^l H^2(x) dx \right) \left(\int_0^l u_x^2(x, t) dx \right) \leq H_0 (G'(T) + mG(T)) e^{mT}. \quad (22)$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей (22), получим

$$\left| \int_0^l H(x) u_x(x, t) dx \right| \leq [H_0 (G'(T) + mG(T))]^{1/2} e^{mT/2}.$$

Отметим также, что $|F(t)| \leq \frac{|E'| + c_1|E| + |f_1|}{|K(l)|}$, $|f_1(t)| = \left| \int_0^l Kf dx \right|$. Поэтому $|S(t)| \leq A$, где A зависит от l, T, K, c, E, f .

Рассмотрим теперь $\int_0^T |\Phi^N(l, t) - \eta(l, t)| dt$. Нетрудно показать, учитывая (4), что справедлива следующая оценка:

$$\left(\int_0^T |\Phi^N(l, t) - \eta(l, t)| dt \right)^2 \leq C^2 \left(\int_0^T \int_0^l |(\Phi^N(x, t) - \eta(x, t))_x| dx dt + \int_0^T \int_0^l |\Phi^N(x, t) - \eta(x, t)| dx dt \right)^2.$$

Тогда

$$\left(\int_0^T |\Phi^N(l, t) - \eta(l, t)| dt \right)^2 \leq 2lTC^2 \left(\int_0^T \int_0^l (\Phi_x^N - \eta_x)^2 dx dt + \int_0^T \int_0^l (\Phi^N - \eta)^2 dx dt \right) \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Поэтому правая часть (21) также стремится к 0, что означает справедливость предельного перехода (20). Тогда при переходе к пределу при $N \rightarrow \infty$ в равенстве (19) получим, что оно выполняется $\forall \eta \in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x, T) = 0$. А это означает, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству из определения обобщенного решения задачи (1)–(3), (6). Следовательно, решение задачи (1)–(3), (6) существует.

2. Единственность решения. Пусть задача (1)–(3), (6) имеет два обобщенных решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ из $W_2^{1,0}(Q_T)$. Тогда их разность $u = u_1 - u_2 \in W_2^{1,0}(Q_T)$ и удовлетворяет интегральному тождеству (9) с $\varphi = 0$, $F = 0$, $f = 0$:

$$\int_{Q_T} (-u \eta_t + u_x \eta_x - cu \eta) dx dt = \int_0^T \int_0^l H(x) u_x(x, t) dx \eta(l, t) dt. \quad (23)$$

Следуя [6], получим из (23) равенство

$$\frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx + \int_{Q_\tau} u^2 dx dt = \int_{Q_\tau} cu^2 dx dt + \int_{Q_\tau} H(x) u_x(x, t) u(l, t) dx dt$$

для почти всех $\tau \in [0, T]$. А тогда, повторяя рассуждения из п.1, получим оценку: $|u|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq 0$,

что означает совпадение решений $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$.

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения, 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
2. Кожанов А. И. О разрешимости краевой с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки, 2004. № 30. С. 63–69.
3. Пулькина Л. С. Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Инс-т. мат. СО РАН, 2005. С. 231–239.
4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / 4-е изд. М.: Наука, 1974. 331 с.
5. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
6. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 115 с.

Поступила 20.09.2006 г.