Общероссийский математический портал

Л. А. Ковалева, О модифицированной задаче Бицадзе–Самарского, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 10–15

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:26:19

О МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЗАДАЧЕ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО

Рассматривается краевая нелокальная задача, являющаяся аналогом задачи Бицадзе–Самарского. В двумерном случае задачу удается свести к локальной краевой задаче, точнее к задаче Дирихле, для уравнения, аналогичного уравнению Лапласа на стратифицированном множестве. С помощью метода Пуанкаре–Перрона устанавливается, что решением является верхняя огибающая семейства субгармонических функции, принимающих на границе заданные значения.

1. Введение. Краевым задачам с нелокальными краевыми условиями посвящено значительное число работ; первой в этом ряду стоит работа Бицадзе и Самарского. Между тем некоторые из этих нелокальных краевых задач (в том числе и задача Бицадзе–Самарского) специальными приемами сводятся к локальным задачам. В данной работе приводится пример такой нелокальной задачи, являющейся аналогом задачи Бицадзе–Самарского. Эту задачу удастся свести к локальной краевой задаче, точнее, к задаче Дирихле для уравнения, аналогичного уравнению Лапласа на стратифицированном множестве. Для доказательства ее разрешимости удастся воспользоваться методом Пуанкаре–Перрона, т.е. решение оказывается верхней огибающей класса субгармонических функций, естественным образом определяемого краевой задачей.

Р и с. 1. Исходное множество

2. Постановка задачи. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается прямоугольник Π (см. рис.1), в котором выделено n вертикальных интервалов $\gamma_i = \{(\xi_i, y), y \in (0, 1)\}$, ($i = 1, \dots, N$) причем $\xi_1 = 0$, $\xi_n = 1$. Эти интервалы разбиваются на группы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, в каждую из которых входит некоторое число интервалов γ_i (не обязательно идущих подряд). Задача состоит в нахождении непрерывной в замыкании Π функции, которая гармонична в каждой полосе прямоугольника Π , заключенного между γ_i и γ_{i+1} , то есть

$$\Delta u = 0, \quad (1)$$

и удовлетворяющей следующим условиям:

$$u(\xi_i, y) = u(\xi_j, y), \quad y \in [0, 1], \quad (2)$$

если γ_i и γ_j входят в одну группу Γ_k . Далее, если Γ_k состоит из интервалов $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_r}$, то

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right](\xi_{i_1}, y) + \dots + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right](\xi_{i_r}, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (3)$$

где $\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right](\xi_i, y)$ означает «скачок» производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i + 0, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i - 0, y), \quad \xi_i \neq 0, 1.$$

Если же $\xi_i = 0$ или $\xi_i = 1$, то речь идет об односторонних производных $\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i + 0, y)$ и, соответственно, $-\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i - 0, y)$.

Кроме того, задаются условия Дирихле:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u(x, 1) = \varphi_1(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (4)$$

В отличие от задачи Бицадзе–Самарского [1], функция u не предполагается гармонической во всей полосе Π , что компенсируется условиями вида (3). Это обстоятельство не позволяет применить схему доказательства разрешимости задачи (1)–(4), предложенную в работе [1].

3. Преобразование задачи (1)–(4) к задаче Дирихле на стратифицированном множестве. Разрешимость краевой задачи (1)–(4) будем доказывать методом Пуанкаре–Перрона (см. следующий пункт). В этом пункте дается интерпретация соотношений (1)–(4) в виде задачи Дирихле для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. Такая интерпрета-

ция (1)–(4), не являясь обязательной, упростит дальнейшие построения.

На множестве Π введем отношение эквивалентности $\sim$, объявив каждую точку, не принадлежащую ни одной из групп Γ_k , эквивалентной только себе, а в группе Γ_k эквивалентными объявим все точки вида (ξ_i, y) с фиксированным y . Фактор-множество $\Pi/\sim = \Omega_0$, удобно представить в виде объединения одномерных многообразий, получаемых склейкой элементов γ_j группы Γ_i , и двумерных многообразий — образов участков между соседними интервалами γ_j .

Результат описанной факторизации Φ можно иллюстрировать в виде множества Ω_0 , устроенного как на рис. 2.

Множество Ω_0 можно считать изометричным (в пределах каждой полосы между соседними γ_i) образом в $\mathbb{R}^3$ прямоугольника Π . Хотя это не всегда удастся реализовать без самопересечений, приводимые далее рассуждения от этого обстоятельства не зависят.

Р и с. 2. Результат факторизации исходного множества

Через Ω обозначим замыкание Ω_0 в $\mathbb{R}^3$. Разность $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$ будет тогда границей множества Ω_0 в топологии, индуцированной на Ω_0 из $\mathbb{R}^3$. Одномерные многообразия, полученные в результате факторизации (склейки) точек отрезков $\gamma_i \in \Gamma_k$, будем называть одномерными стратами Ω и обозначать σ_{1k} . Образы полос между соседними интервалами γ_i назовем двумерными стратами; обозначать их будем через σ_{2k} . Точки из $\partial\Omega_0$, к которым примыкают страты σ_{1i} , назовем нуль-мерными стратами и обозначим σ_{0i} . В число одномерных стратов включим также связные компоненты множества $\partial\Omega_0 \setminus \bigcup_i \sigma_{0i}$. В результате описанного разбиения множество Ω превратится в стратифицированное множество в смысле [2].

Соотношения (1), (2) можно теперь интерпретировать как единое уравнение $Lu = 0$ эллиптического типа (на описанном выше стратифицированном множестве), которое на одномерных стратах σ_{1i} имеет вид

$$\sum_{\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, \quad (5)$$

что является иной записью уравнения (3). Суммирование ведется по всем стратам σ_{2j} , примыкающим к σ_{1i} (запись $\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}$ как раз и означает факт примыкания); нормальные производные $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ вычисляются в направлении единичного вектора, ортогонального к σ_{1i} и направленного внутрь σ_{2j} ; для некоторых стратов $\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}$ таких нормалей две и в сумму включены обе производные. На двумерных стратах уравнение $Lu = 0$ совпадает с (1). Мы позволим себе вместо L употреблять обозначение Δ , поскольку комплекс соотношений (1), (2), как было указано в работе [3] (см. также [4]–[7]), является точным аналогом уравнения Лапласа–Бельтрами на Ω_0 .

Задача (1)–(4) на рассматриваемом множестве приобретает тогда вид аналога обычной «локальной» задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0, \quad (6)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad (7)$$

где φ совпадает либо с φ_0 , либо с φ_1 , в зависимости от того, какой участок границы рассматривается.

Решением задачи (6), (7) назовем (в соответствии с предыдущим пунктом) непрерывную

на Ω функцию, удовлетворяющую (6), (7) в классическом смысле. Тем самым будет доказана классическая разрешимость и задачи (1)–(4) в силу описанной выше процедуры ее сведения к (6), (7).

4. Разрешимость задачи (6), (7). Доказательство разрешимости задачи (6), (7), а с ней и задачи (1)–(4), проведем методом, аналогичным стандартному методу Пуанкаре-Перрона (см. [7]).

Реализацию этого метода начнем с решения задачи Дирихле в шаре множества Ω_0 достаточно малого радиуса.

Множество Ω в целом не является многообразием, а поэтому вблизи некоторых точек невозможно ввести естественные координаты; это относится, например, к точкам $X \in \sigma_{li}$. Поэтому в окрестности ω точки $X \in \sigma_{li}$ координаты вводятся автономно на каждой связной компоненте множества $\omega \cap (\sigma_{li} \cup \sigma_{2j})$, где $\sigma_{2j} \succ \sigma_{li}$ (координатные линии показаны на рис. 3):

Р и с. 3. К введению координат

Р и с. 4. Стратифицированный шар

Далее в настоящей работе в качестве ω берется шар $B_r(X_0)$, который определяется следующим образом. Шаром $B_r(X_0)$ с центром в точке $X_0 \in \Omega_0$ назовем множество точек X , геодезическое расстояние которых до точки X_0 меньше r . При этом r будем считать меньше, чем расстояние от точки $X_0 \in \sigma_{kj}$ до стратов, отличных от σ_{kj} , замыкания которых не содержат эту точку. Прообразом такого шара при описанной выше факторизации Φ является объединение некоторого числа двумерных полушарий, если $X_0 \in \sigma_{1j}$, или обычный двумерный шар, если $X_0 \in \sigma_{2j}$. Пример стратифицированного шара изображен на рис. 4.

В дальнейшем постоянно используется интегрирование по так называемой «стратифицированной» мере μ . Для множества $\omega \in \Omega$ она определяется как сумма k -мерных мер Лебега «следов» ω на σ_{ki} , а именно, мы полагаем

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{ki}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{ki}),$$

где μ_k — k -мерная мера Лебега на σ_{ki} . Нетрудно показать, что измеримыми по такой мере оказываются такие множества ω , что каждое пересечение $\omega \cap \sigma_{ki}$ является μ_k -измеримым. Интеграл Лебега от μ -измеримой на Ω функции f по такой мере оказывается суммой обычных интегралов Лебега по отдельным стратам, то есть

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{\sigma_{ki}} \int_{\sigma_{ki}} f d\mu_k. \quad (8)$$

В дальнейшем рассматриваются (по большей части) интегралы по границам стратифицированных шаров (сфер). В этом случае сфера рассматривается как стратифицированное множество с естественной стратификацией $\hat{\sigma}_{l-j} = \partial B_r(\xi) \cap \sigma_{lj}$ по всем l, j . Для обозначения меры, введенной на $\partial B_r(\xi)$ описанным выше образом, мы будем пользоваться тем же символом μ .

Переходим к формуле Пуассона в стратифицированном шаре. Естественно, что в случае, когда $X_0 \in \sigma_{2j}$, формула Пуассона имеет обычный вид. Если же $X_0 \in \sigma_{li} \subset \Omega_0$, то можно показать, что формула Пуассона имеет следующий вид:

$$u(X) = - \int_{\partial B_r(X_0)} \varphi(Y) \frac{\partial G(X, Y)}{\partial \nu} d\mu, \quad (9)$$

где в предположении, что $Y \subset B_l = \sigma_{2l} \cap B_r(X_0)$, имеем:

$$G(X, Y) = \frac{2}{m} \begin{cases} \frac{m}{2} K(x, y) + \frac{2-m}{2} K(\hat{x}, y), & X \in B_l, \\ K(\hat{x}, y), & X \in B_j \ (j \neq l). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $\hat{x} = (x^1, -x^2)$, $x = (x^1, x^2)$, а m — число «лепестков» в шаре $B_r(X_0)$. Через $K(x, y)$ обозначена классическая функция Грина оператора Лапласа в шаре при условиях Дирихле, где $x = (x^1, x^2)$ — координаты точки X , введенные описанным выше способом. Нетрудно показать, что функция $u(x)$, определяемая в (9), действительно является решением задачи (6)–(7) в шаре $B_r(X_0)$.

Кроме формулы Пуассона в шаре для реализации метода Пуанкаре-Перрона потребуются следующие факты. Первый из них является аналогом теоремы о среднем.

Теорема 1. Пусть $B_r(X_0)$ — стратифицированный шар, а $u(x)$ — гармоническая функция. Тогда справедливо следующее равенство:

$$u(X_0) = \frac{1}{\mu(\partial B_r(X_0))} \int_{\partial B_r(X_0)} u(x) d\mu. \quad (11)$$

Правую часть равенства (11) будем обозначать через $M_{r, X_0}(u)$. Можно показать, что если от функции u потребовать лишь выполнения неравенства $\Delta u \geq 0$, то вместо (11) имеет место неравенство

$$u(X_0) \leq M_{r, X_0}(u). \quad (12)$$

Доказательства этих утверждений стандартны. Неравенство (12) мотивирует следующее определение.

Определение 1. Непрерывная на Ω_0 функция u называется субгармонической, если для любого X_0 и для любого r справедливо неравенство $u(X_0) \leq M_{r, X_0}(u)$.

Аналогично, с помощью противоположного неравенства определяется понятие супергармонической функции.

Для удобства перечислим некоторые свойства субгармонических и супергармонических функций:

- функция одновременно субгармоническая и супергармоническая является гармонической;
- верхняя огибающая конечного числа субгармонических функций является субгармонической функцией;
- если v — субгармоническая (супергармоническая), а u — гармоническая функция, то $v + u$ (соответственно $(v - u)$) будет субгармонической (супергармонической) функцией;
- если $u_{X_0, r}(X)$ — гармоническая срезка (см. [8]) в шаре $\bar{B}_r(X_0) \subset \Omega$ субгармонической в Ω функции, то имеет место неравенство $u(X) \leq u_{X_0, r}(X)$ при всех $X \in \Omega$.

Следующая теорема дает аналог «сферического» неравенства Харнака для гармонических функций.

Теорема 2. Пусть u — неотрицательная на Ω_0 гармоническая функция, а $B_r(X_0) \subset \Omega_0$, $X_0 \in \sigma_{2i}$ или $X_0 \in \sigma_{1i}$. Тогда при $\rho < r$ имеем

$$\frac{(r - \rho)}{(r + \rho)} u(X_0) \leq u(X) \leq \frac{(r + \rho)}{(r - \rho)} u(X_0) \quad (13)$$

для любого $X \in B_r(X_0)$, удаленного от X_0 на расстояние ρ .

В отличие от классического случая, общее неравенство Харнака на стратифицированном множестве не следует из сферического из-за ограничений на радиус шара, описанного выше. Не следует оно, по тем же соображениям, и из теоремы о среднем. Тем не менее, его удастся получить, комбинируя эти два факта. На этом пути получается следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $F \subset \Omega_0$ — компактно. Тогда существует такая (зависящая только от F) константа C , что неравенство

$$\max_{X \in F} u(X) \leq C \min_{X \in F} u(X) \quad (14)$$

выполняется для всех неотрицательных в Ω_0 гармонических функций.

Нам в дальнейшем понадобится теорема Харнака.

Теорема 4. Пусть $u_n : B_r(X_0) \rightarrow \mathbb{R}$ — неубывающая последовательность гармонических функций, сходящаяся в некоторой точке X . Тогда u_n сходится равномерно в любом шаре

$B_{r'}(X_0) \subset B_r(X_0)$. Причем предельная функция будет гармонической.

Доказательство разрешимости, как обычно, начнем с определения класса S_φ субгармонических на Ω функций, принимающих на границе $\partial\Omega_0$ значения не большие, чем соответствующие значения функции φ . В соответствии с методом Пуанкаре-Перрона определим на Ω функцию W_φ как верхнюю огибающую класса S_φ , то есть

$$W_\varphi(X) = \sup_{u \in S_\varphi} u(X), X \in \Omega_0.$$

Теперь докажем, что W_φ является классическим решением задачи (6), (7). Мы будем следовать здесь стандартной схеме, изложенной в [9].

Теорема 5. Функция W_φ является решением задачи (6), (7).

Доказательство. Возьмем произвольную точку $Y \in \Omega$ и покажем, что W_φ гармоническая функция в некоторой окрестности Y , тем самым мы покажем справедливость условия (6). Из определения W_φ следует, что существует последовательность u_n из класса S_φ , сходящаяся к W_φ в точке Y . Будем считать, что u_n возрастающая последовательность (в противном случае перейдем к последовательности $\bar{u}_n = \max\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, которая также сходится в точке Y к $W_\varphi(Y)$). Можно также считать, переходя при необходимости к гармоническим срезкам, что функции u_n – гармонические в некотором шаре $B_{r'}(Y)$. Тогда в силу теоремы Харнака u_n сходится в шаре $B_{r'}(Y)$ при $r' < r$ к некоторой гармонической функции u .

Покажем, что $u = W_\varphi$ в $B_{r'}(Y)$ (тем самым мы покажем, что W_φ гармоническая в этом шаре). В предположении противного, найдется такая точка $Z \in B_{r'}(Y)$, что $u(Z) < W_\varphi(Z)$. В силу определения W_φ существует $w \in S_\varphi$ такая, что $u(Z) < w(Z) \leq W_\varphi(Z)$. Рассмотрим последовательность $w_n = \max(w, u_n)$. Рассуждая как выше видим, что гармоническая срезка функций w_n сходится к некоторой гармонической в $B_{r'}(Y)$ функции v . Тогда, в силу выбора w_n , имеем $u(X) \leq v(X) \leq W_\varphi(X)$ при всех $X \in B_{r'}(Y)$, причем $u(Y) = v(Y) = W_\varphi(Y)$. Отсюда, согласно принципу максимума, следует, что $u(X) \equiv v(X)$ в шаре $B_{r'}(Y)$. Мы пришли к противоречию с предположением, что $u(Z) < W_\varphi(Z)$ для всех $Z \in B_{r'}(Y)$.

Теперь остается показать, что функция $W_\varphi(X)$ удовлетворяет граничному условию (7). Для этой цели воспользуемся стандартной барьерной техникой. Барьером в точке $Z \in \partial\Omega$ назовем, как обычно (см. [9]), супергармоническую функцию θ , положительную в $\bar{\Omega} \setminus \{Z\}$ и обращаящуюся в нуль в точке Z . Все точки, в которых существует барьер, называются регулярными.

Стандартно проверяется, что $W_\varphi(X)$ удовлетворяет условию (7) в каждой регулярной точке (подробности можно найти в работах [9, 10]). Поэтому остается показать, что все точки границы регулярные. Это делается явным построением барьера. При этом барьерную функцию удобно строить не на стратифицированном множестве Ω , а на исходном прямоугольнике, из которого путем факторизации было получено множество Ω .

Возьмем произвольную точку $z_0 \in \partial\Omega$. Построим шар в плоскости прямоугольника, касающийся этого прямоугольника только в точке z_0 . Пусть y_0 его центр. Тогда функция

$$u_{y_0}(x) = \ln \frac{|x - y_0|}{R},$$

где R радиус шара, является искомым барьером, что легко проверяется простыми выкладками. Например, очевидно, что она удовлетворяет в каждой полосе γ_i уравнению Лапласа. Из-за того, что она гладкая в прямоугольнике, следует, что все скачки, участвующие в формуле (3), равны нулю, а потому

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right](\xi_{i1}, y) + \dots + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right](\xi_{in}, y) = 0,$$

что совпадает с условием (3). Очевидно, что $u_{y_0}(x)$ положительна всюду в прямоугольнике, кроме точки z_0 , и что $u_{y_0}(z_0) = 0$. Тем самым полностью доказано, что $W_\varphi(X)$ является решением задачи (6), (7).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т.185. С.739–740.
2. Фам Ф. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М.: Мир, 1970, 184 с.
3. Penkin O. About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions // Partial Differential Equations on Multistructures, ed. by F. Ali Mehmeti, J.von Below and S.Nicaise / Lect. Notes Pure Appl. Math. 2001. V. 219. P. 183–192.
4. Penkin O.M. Second-order elliptic equations on a stratified set. Differential equations on networks // J. Math. Sci. (N. Y.) 119 (2004), №. 6. P. 836–867.
5. Пенкин О.М., Богатов Е.М. О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах // Матем. заметки, 2000. Вып. 68. № 6. С. 874.
6. Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О дифференциальных неравенствах для эллиптических уравнений на сложных многообразиях // Докл. РАН. Т. 360. № 4. 1998. С. 456–458.
7. Nicaise S., Penkin O. Poincare-Perron's method for the Dirichlet problem on stratified sets // J. Math. Anal. Appl. 296 (2004). № 2. P. 504–520.
8. John F. Partial Differential Equation. Springer Verlag, 1986. 250 p.
9. Гилбарг Д., Трудингер М.Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
10. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980, 304 с.

Поступила 2.10.2006 г.

УДК 517.956

Р. Н. Салихов

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Изучается нелокальная краевая задача для вырождающегося гиперболического уравнения в области D , которая представляет собой объединение двух областей в верхней и нижней полуплоскостях. Доказательство существования и единственности решения исследуемой задачи сведено к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$LU = |y|^{2m} U_{xx} - \text{sign}(y)(yU_{yy} + \alpha U_y) = 0, \quad (1)$$

где $m > \frac{1}{2}$, $\frac{1-2m}{2} < \alpha < 1$, в области $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 — конечная односвязная область плоскости независимых переменных x и y , ограниченная характеристиками

$$AC_1: x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0, \quad BC_1: x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$ и отрезком $\bar{J} \equiv AB = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$, D_2 — конечная односвязная область плоскости независимых переменных x и y , ограниченная характеристиками

$$AC_2: x - \frac{2}{2m+1}y^{\frac{2m+1}{2}} = 0, \quad BC_2: x + \frac{2}{2m+1}y^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (1) при $y > 0$ и отрезком $\bar{J}$.

Введем следующие обозначения: $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x \in J$ с характеристиками AC_1 и BC_2 соответственно; $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$

Р и с. 1. Область D