Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Салихов, Решение одной нелокальной задачи для гиперболического уравнения в замкнутой форме, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 15–19

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 09:56:34

что совпадает с условием (3). Очевидно, что $u_{y_0}(x)$ положительна всюду в прямоугольнике, кроме точки z_0 , и что $u_{y_0}(z_0) = 0$. Тем самым полностью доказано, что $W_\varphi(X)$ является решением задачи (6), (7).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т.185. С.739–740.
2. Фам Ф. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М.: Мир, 1970, 184 с.
3. Penkin O. About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions // Partial Differential Equations on Multistructures, ed. by F. Ali Mehmeti, J.von Below and S.Nicaise / Lect. Notes Pure Appl. Math. 2001. V. 219. P. 183–192.
4. Penkin O.M. Second-order elliptic equations on a stratified set. Differential equations on networks // J. Math. Sci. (N. Y.) 119 (2004), №. 6. P. 836–867.
5. Пенкин О.М., Богатов Е.М. О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах // Матем. заметки, 2000. Вып. 68. № 6. С. 874.
6. Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О дифференциальных неравенствах для эллиптических уравнений на сложных многообразиях // Докл. РАН. Т. 360. № 4. 1998. С. 456–458.
7. Nicaise S., Penkin O. Poincare-Perron's method for the Dirichlet problem on stratified sets // J. Math. Anal. Appl. 296 (2004). № 2. P. 504–520.
8. John F. Partial Differential Equation. Springer Verlag, 1986. 250 p.
9. Гилбарг Д., Трудингер М.Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
10. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980, 304 с.

Поступила 2.10.2006 г.

УДК 517.956

Р. Н. Салихов

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Изучается нелокальная краевая задача для вырождающегося гиперболического уравнения в области D , которая представляет собой объединение двух областей в верхней и нижней полуплоскостях. Доказательство существования и единственности решения исследуемой задачи сведено к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$LU = |y|^{2m} U_{xx} - \text{sign}(y)(yU_{yy} + \alpha U_y) = 0, \quad (1)$$

где $m > \frac{1}{2}$, $\frac{1-2m}{2} < \alpha < 1$, в области $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 — конечная односвязная область плоскости независимых переменных x и y , ограниченная характеристиками

$$AC_1: x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0, \quad BC_1: x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$ и отрезком $\bar{J} \equiv AB = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$, D_2 — конечная односвязная область плоскости независимых переменных x и y , ограниченная характеристиками

$$AC_2: x - \frac{2}{2m+1}y^{\frac{2m+1}{2}} = 0, \quad BC_2: x + \frac{2}{2m+1}y^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (1) при $y > 0$ и отрезком $\bar{J}$.

Введем следующие обозначения: $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x \in J$ с характеристиками AC_1 и BC_2 соответственно; $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$

Р и с. 1. Область D

и $(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x)$ – операторы обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b,c;x)$, введенные в [4] и имеющие при действительных α, β, η и $0 < x < 1$ вид

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha + \beta, -\eta, \alpha; 1 - \frac{t}{x}\right) f(t) dt \quad (\alpha > 0), \quad (2)$$

$$(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\left(\alpha + \beta, -\eta, \alpha; \frac{t-x}{1-x}\right) f(t) dt \quad (\alpha > 0). \quad (3)$$

Для доказательства последующих утверждений потребуются следующие леммы [5].

Лемма 1. Пусть $0 < -\alpha < \lambda < 1$, и $\beta < \min[0, \eta + 1]$. Если $\varphi(x) \in H^\lambda[0, 1]$, то

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} \varphi)(x), (I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} \varphi)(x) \in H^{\min[\lambda+\alpha, -\beta]}[0, 1].$$

Лемма 2. Пусть $0 < \alpha < \lambda < 1$, $\lambda - \alpha < 1$ и $\rho(x) = x^\mu$, где $0 \leq \mu < \lambda - \alpha + 1$. Если $\varphi(x) \in H_0^\lambda(\rho; [0, 1])$, то

$$(D_{0+}^\alpha \varphi)(x) \in H_0^{\lambda-\alpha}(\rho, [0, 1]).$$

Для уравнения (1) изучим краевую задачу.

Задача 1. Найти функцию $U(x, y)$ со свойствами:

- 1) $LU \equiv 0$ в области $D = D_1 \cup D_2$;
- 2) $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(\bar{D} \setminus J) \cap C^2(\bar{D} \setminus J)$;
- 3) $v_1(x) = \lim_{y \rightarrow 0-} \frac{dU}{dy}$, $v_2(x) = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{dU}{dy}$, $x \in J$;
- 4) $\tau_1(x) = \lim_{y \rightarrow 0-} U(x, y)$, $\tau_2(x) = \lim_{y \rightarrow 0+} U(x, y)$, $x \in \bar{J}$;
- 5) выполняются условия склеивания:

$$\tau_1(x) = \tau_2(x), \quad v_1(x) = v_2(x); \quad (4)$$

- 6) выполняются условия:

$$A_1 I_{0+}^{a,b,-a-\beta} t^{2\beta-1} U[\Theta_0] + A_2 I_{0+}^{a+\beta,b+1-2\beta,-a-\beta} U[t, 0-] + A_3 I_{0+}^{a+1-\beta,b,-a-\beta} U_y[t, 0-] = \varphi_1(x), \quad (5)$$

$$B_1 I_{1-}^{a^*,b^*, -a^*-\beta} (1-t)^{2\beta-1} U[\Theta_1] + B_2 I_{1-}^{a^*+\beta,b^*+1-2\beta,-a^*-\beta} U[t, 0+] + B_3 I_{1-}^{a^*+1-\beta,b^*, -a^*-\beta} U_y[t, 0+] = \varphi_2(x), \quad (6)$$

где $A_{1,2,3}$, $B_{1,2,3}$ — некоторые вещественные константы; $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — известные функции, такие, что

$$\varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}[0, 1], \quad \varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}[0, 1], \quad (7)$$

$$0 < a^* + \beta < \lambda_1 < 1, \quad 0 < a + \beta < \lambda_2 < 1.$$

Теорема 1. Пусть $-\beta < a < \beta$, $0 < b < 2\beta$, $-\beta < a^* < \beta$, $0 < b^* < 2\beta$, $A_2 \neq -\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} A_1$,

$B_2 \neq -\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} B_1$, функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям (7), тогда задача 1 однозначно разрешима.

Доказательство. При $y < 0$ уравнение (1) имеет вид

$$(-y)^{2m} U_{xx} + y U_{yy} + \alpha U_y = 0. \quad (8)$$

При $\frac{1}{2} - m < \alpha < 1$ регулярное решение $U(x, y)$ уравнения (8), удовлетворяющее условиям

$$U(x, 0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (9)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0-} (-y)^\alpha U_y(x, y) = v_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (10)$$

где $\tau_1(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$, $v_1(x) \in C^1(J)$, дается формулой [1, 2]

$$U(x, y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau_1 \left[x + (1-2t)(-y)^{\frac{2}{m_0}} \frac{m_0}{2} \right] t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt -$$

$$-\frac{m_0 \Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma^2(1-\beta)} (-y)^{1-\alpha} \int_0^1 \nu_1 \left[x + (1-2t)(-y)^{\frac{2}{m_0}} \frac{m_0}{2} \right] t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt. \quad (11)$$

При $y > 0$ уравнение (1) имеет вид

$$y^{2m} U_{xx} - y U_{yy} - \alpha U_y = 0. \quad (12)$$

При $\frac{1}{2} - m < \alpha < 1$ регулярное решение $U(x, y)$ уравнения (12), удовлетворяющее условиям

$$U(x, 0) = \tau_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (13)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^\alpha U_y(x, y) = \nu_2(x), \quad 0 < x < 1, \quad (14)$$

где $\tau_2(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$, $\nu_2(x) \in C^1(J)$, дается формулой [1, 2]

$$U(x, y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau_1 \left[x + (1-2t)y^{\frac{2}{m_0}} \frac{m_0}{2} \right] t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt + \\ + \frac{m_0 \Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma^2(1-\beta)} y^{1-\alpha} \int_0^1 \nu_1 \left[x + (1-2t)y^{\frac{2}{m_0}} \frac{m_0}{2} \right] t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt. \quad (15)$$

Здесь $\beta = \frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}$, $m_0 = \frac{4}{2m+1}$.

Так как

$$\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}; -\left(\frac{x}{m_0} \right)^{\frac{m_0}{2}} \right), \quad \Theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}; \left(\frac{1-x}{m_0} \right)^{\frac{m_0}{2}} \right), \quad (16)$$

то, используя (11), (15), для $U(\Theta_0)$ и $U(\Theta_1)$ имеем:

$$U[\Theta_0(x)] = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau_1(x-xt)t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1} dt - \frac{m_0}{2} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} \left(\frac{x}{m_0} \right)^{1-2\beta} \int_0^1 \nu_1(x-xt)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta} dt, \quad (17)$$

$$U[\Theta_1(x)] = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau_2(1-(1-x)t)t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1} dt + \\ + \frac{m_0}{2} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} \left(\frac{1-x}{m_0} \right)^{1-2\beta} \int_0^1 \nu_2(1-(1-x)t)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta} dt. \quad (18)$$

Преобразуя (17), (18) и используя (2), (3), получим

$$U[\Theta_0(x)] = M_1(I_{0+}^{\beta,0,\beta-1} \tau_1)(x) - M_2 x^{1-2\beta} (I_{0+}^{1-\beta,0,-\beta} \nu_1)(x), \quad (19)$$

$$U[\Theta_1(x)] = M_1(1-x)^{1-2\beta} (I_{1-}^{\beta,1-2\beta,-\beta} \tau_2)(x) + M_2 (I_{1-}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1} \nu_2)(x), \quad (20)$$

где $M_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}$, $M_2 = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{2m+1}{4} \right)^{-2\beta}$.

Подставляя $U[\Theta_0(x)]$ и $U[\Theta_1(x)]$ в краевые условия (5), (6), имеем

$$A_1 M_1 (I_{0+}^{a,b,-a-\beta} t^{2\beta-1} I_{0+}^{\beta,0,\beta-1} \tau_1)(x) - A_1 M_2 (I_{0+}^{a,b,-a-\beta} I_{0+}^{1-\beta,0,-\beta} \nu_1)(x) + \\ + A_2 (I_{0+}^{a+\beta,b+1-2\beta,-a-\beta} \tau_1)(x) + A_3 (I_{0+}^{a+1-\beta,b,-a-\beta} \nu_1)(x) = \varphi_1(x), \quad (21)$$

$$B_1 M_1 (I_{1-}^{a^*,b^*,-a^*-\beta} I_{1-}^{\beta,1-2\beta,-\beta} \tau_2)(x) + B_1 M_2 (I_{1-}^{a^*,b^*,-a^*-\beta} (1-t)^{2\beta-1} I_{1-}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1} \nu_2)(x) + \\ + B_2 I_{1-}^{a^*+\beta,b^*+1-2\beta,-a^*-\beta} \tau_2 + B_3 I_{1-}^{a^*+1-\beta,b^*,-a^*-\beta} \nu_2 = \varphi_2(x). \quad (22)$$

При $\gamma > 0$ верны формулы композиции [3]:

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f)(x) = (I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f)(x), \quad (23)$$

$$(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} I_{1-}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f)(x) = (I_{1-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f)(x), \quad (24)$$

а при $\alpha > 0$ — формулы сдвига [3]:

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = x^{-\alpha-\beta-\eta} (I_{0+}^{\alpha,-\alpha-\eta,-\alpha-\beta} f)(x), \quad (25)$$

$$(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = (1-x)^{-\alpha-\beta-\eta} (I_{1-}^{\alpha,-\alpha-\eta,-\alpha-\beta} f)(x). \quad (26)$$

Применяя формулы (23)–(26) преобразуем выражения (21), (22):

$$A_1 M_1 (I_{0+}^{a+\beta, b+1-2\beta, -a-\beta} \tau_1)(x) - A_1 M_2 (I_{0+}^{a+1-\beta, b, -a-\beta} \nu_1)(x) + \\ + A_2 (I_{0+}^{a+\beta, b+1-2\beta, -a-\beta} \tau_1)(x) + A_3 (I_{0+}^{a+1-\beta, b, -a-\beta} \nu_1)(x) = \varphi_1(x), \quad (27)$$

$$B_1 M_1 (I_{1-}^{a^*+\beta, b^*+1-2\beta, -a^*-\beta} \tau_2)(x) + B_1 M_2 (I_{1-}^{a^*+1-\beta, b^*, -a^*-\beta} \nu_2)(x) + \\ + B_2 I_{1-}^{a^*+\beta, b^*+1-2\beta, -a^*-\beta} \tau_2 + B_3 I_{1-}^{a^*+1-\beta, b^*, -a^*-\beta} \nu_2 = \varphi_2(x). \quad (28)$$

Поддействуем оператором $I_{0+}^{-a-\beta, -b-1+2\beta, 0}$ на выражение (27), и, применяя формулу (23), получим выражение для τ_1 :

$$\tau_1 = \frac{A_1 M_2 - A_3}{A_1 M_1 + A_2} (I_{0+}^{1-2\beta, 2\beta-1, 0} \nu_1)(x) + \frac{1}{A_1 M_1 + A_2} (I_{0+}^{-a-\beta, -b-1+2\beta, 0} \varphi_1)(x). \quad (29)$$

Аналогичным образом из (28) получаем выражение для τ_2 :

$$\tau_2 = -\frac{B_1 M_2 + B_3}{B_1 M_1 + B_2} (I_{1-}^{1-2\beta, 2\beta-1, 0} \nu_2)(x) + \frac{1}{B_1 M_1 + B_2} (I_{1-}^{-a^*-\beta, -b^*-1+2\beta, 0} \varphi_2)(x). \quad (30)$$

Используя условия склеивания (4), получим уравнение

$$\frac{A_1 M_2 - A_3}{A_1 M_1 + A_2} (I_{0+}^{1-2\beta, 2\beta-1, 0} \nu)(x) + \frac{B_1 M_2 + B_3}{B_1 M_1 + B_2} (I_{1-}^{1-2\beta, 2\beta-1, 0} \nu)(x) = f(x), \quad (31)$$

где

$$f(x) = \frac{1}{B_1 M_1 + B_2} (I_{1-}^{-a^*-\beta, -b^*-1+2\beta, 0} \varphi_2)(x) - \frac{1}{A_1 M_1 + A_2} (I_{0+}^{-a-\beta, -b-1+2\beta, 0} \varphi_1)(x). \quad (32)$$

Пусть $A_2 \neq -M_1 A_1$, $B_2 \neq -M_1 B_1$. Введем следующие обозначения:

$$P_1 = \frac{A_1 M_2 - A_3}{A_1 M_1 + A_2}, \quad P_2 = \frac{B_1 M_2 + B_3}{B_1 M_1 + B_2}, \quad P_3 = \frac{1}{A_1 M_1 + A_2}, \quad P_4 = \frac{1}{B_1 M_1 + B_2}. \quad (33)$$

Применим к выражению (31) оператор $I_{0+}^{2\beta-1, 1-2\beta, \gamma}$:

$$P_1 \nu(x) + P_2 (I_{0+}^{2\beta-1, 1-2\beta, \gamma} I_{1-}^{1-2\beta, 2\beta-1, 0} \nu)(x) = f_1(x), \quad (34)$$

где

$$f_1(x) = P_4 (I_{0+}^{2\beta-1, 1-2\beta, \gamma} I_{1-}^{-a^*-\beta, -b^*-1+2\beta, 0} \varphi_2)(x) - P_3 (I_{0+}^{2\beta-1, 1-2\beta, \gamma} I_{0+}^{-a-\beta, -b-1+2\beta, 0} \varphi_1)(x). \quad (35)$$

Запишем уравнение (31) через операторы Римана–Лиувилля:

$$P_1 \nu(x) + P_2 (D_{0+}^{1-2\beta} I_{1-}^{1-2\beta} \nu)(x) = f_1(x). \quad (36)$$

Учитывая соотношение [4]

$$D_{a+}^\alpha (I_{b-}^\alpha \varphi)(x) = \cos(\pi\alpha) \varphi(x) + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_a^b \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^\alpha \frac{\varphi(t)}{t-x}, \quad (37)$$

перепишем (36) в виде особого интегрального уравнения с ядром Коши:

$$P_1 \nu(x) - P_2 \cos(\pi\beta) \nu(x) + P_2 \frac{\sin(2\pi\beta)}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{x} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(t) dt}{t-x} = f_1(x). \quad (38)$$

Таким образом, исследуемая задача сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения (38). Вводя обозначение

$$x^{1-2\beta} \nu(x) = \psi(x), \quad (39)$$

приведем уравнение (38) к виду

$$a\psi(x) + \frac{b}{\pi} \int_0^1 \frac{\psi(t) dt}{t-x} = f_2(x), \quad (40)$$

где

$$a = P_1 - P_2 \cos(2\pi\beta), \quad b = P_2 \sin(2\pi\beta), \quad f_2(x) = x^{1-2\beta} f_1(x). \quad (41)$$

Решение характеристического сингулярного уравнения на конечном отрезке

$$a\psi(x) + \frac{b}{\pi} \int_0^1 \frac{\psi(t) dt}{t-x} = f_2(x) \quad (0 < x < 1) \quad (42)$$

будем искать в классе $H_0^* = H^*[0, 1] \cap C[0, 1]$ гильберовских функций, ограниченных в точке $x=0$. Будем считать, что $a^2 + b^2 \neq 0$. Обозначим

$$G(x) = \frac{a(x) - ib(x)}{a(x) + ib(x)} = e^{i\theta(x)}, \quad \theta(x) = \arg G(x). \quad (43)$$

Для уравнения (42) функция $G(x)$, а, следовательно, и $\arg G(x)$, будут постоянными. Выберем значение $\arg G(x)$ так, чтобы $0 \leq \theta(0) < 2\pi$, а, следовательно, и $0 \leq \theta(1) < 2\pi$.

Индекс уравнения (42) для искомого класса функций равен

$$\chi = \left[\frac{\theta(1)}{2\pi} \right] = 0.$$

Рассмотрим правую часть интегрального уравнения

$$f_2(x) = P_4 x^{1-2\beta} (I_{0+}^{2\beta-1, 1-2\beta, \gamma} I_{1-}^{-a^*-\beta, -b^*-1+2\beta, 0} \varphi_2)(x) - P_3 x^{1-2\beta} (I_{0+}^{2\beta-1, 1-2\beta, \gamma} I_{0+}^{-a-\beta, -b-1+2\beta, 0} \varphi_1)(x). \quad (44)$$

Используя определение операторов Римана-Лиувилля [3], перепишем (44) в виде

$$f_2(x) = P_4 x^{1-2\beta} (D_{0+}^{1-2\beta} I_{1-}^{-a^*-\beta, -b^*-1+2\beta, 0} \varphi_2)(x) - P_3 x^{1-2\beta} (D_{0+}^{1-2\beta} I_{0+}^{-a-\beta, -b-1+2\beta, 0} \varphi_1)(x). \quad (45)$$

Рассмотрим первое слагаемое. Пусть $\varphi_2(x) \in H^{\tilde{\lambda}_2}[0, 1]$, $-\beta \leq a^* \leq \beta$, $0 < b^* < 2\beta$, тогда согласно лемме 1 $(I_{1-}^{-a^*-\beta, -b^*-1+2\beta, 0} \varphi_2)(x) \in H^{\tilde{\lambda}_2}[0, 1]$, где $\tilde{\lambda}_2 = \min(\lambda_2 - a^* - \beta, b^* + 1 - 2\beta)$. Легко показать, что $0 < 1 - 2\beta < \tilde{\lambda}_2 < 1$, $\tilde{\lambda}_2 + 2\beta - 1 < 1$, тогда по лемме 2 имеем $(D_{0+}^{1-2\beta} I_{1-}^{-a^*-\beta, -b^*-1+2\beta, 0} \varphi_2)(x) \in H^{\tilde{\lambda}_2+2\beta-1}[0, 1]$. Аналогично рассматривается второе слагаемое. Так как $x^{1-2\beta} \in H^{1-2\beta}[0, 1]$, то функция $f_2(x)$ принадлежит гильбертовскому классу.

Таким образом, сингулярное уравнение (42) имеет действительное решение, а значит и решение поставленной задачи существует и единственно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высш. шк., 1985. 304 с.
2. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
3. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
4. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu. Univ, 1978. Vol. 11. № 2. P. 135–143.
5. Saigo M., Kilbas A.A. Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces // Transform Methods and Special Functions, Sofia 94 (Proceeding of International Workshop). Sci. Cult. Tech. Publ., Singapore. 1995. P. 282–293.

Поступила 5.08.2006 г.