Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Сеницкий, Э. Я. Еленицкий, О. В. Дидковский, О. В. Худяков, Дифракция симметричной волны на цилиндрическом препятствии, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 20–28

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:56:04

Приложения дифференциальных уравнений

УДК 532.5.013

Ю. Э. Сеницкий, Э. Я. Еленицкий, О. В. Дидковский, О. В. Худяков

ДИФРАКЦИЯ СИММЕТРИЧНОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРЕПЯТСТВИИ

На основе линейных соотношений гидродинамики приводится новое аналитическое решение начально-краевой задачи о механическом взаимодействии жесткого длинного цилиндра с нестационарной симметричной волной давления. В отличие от известных подходов применен метод конечных интегральных преобразований. Подробно рассматривается дифракция симметричной плоской волны на круговом цилиндре.

При проектировании и строительстве резервуарных парков (терминалов), возводимых в береговой океанической зоне, одну из наиболее опасных аварийных ситуаций представляет волна цунами. Обеспечение безопасной эксплуатации резервуаров (их общей устойчивости) в подобных условиях связано с необходимостью определения суммарного давления, передаваемого на конструкцию в прямой (падающей) к отраженной от препятствия (цилиндрической оболочки) волн. Таким образом, исследование дифракции упругой волны на цилиндрическом препятствии, и связанная с этим задача определения соответствующих гидродинамических нагрузок представляет большой практический интерес. Краевая задача о дифракции волн на сферическом и цилиндрическом препятствиях в линейном приближении рассматривалась в работах [1–5]. При этом авторы пользовались интегральным преобразованием Лапласа по времени t со сложной, не всегда выполняемой, операцией обращения при восстановлении оригинала, связанной с контурным интегрированием в комплексной области. Это затрудняет практическое использование полученных, как правило на ограниченном временном интервале, результатов.

В настоящем исследовании для этой цели применен структурный алгоритм метода конечных интегральных преобразований (КИП) с определением ядровой функции, предусматриваемой процедурой решения задачи [6, 7]. Существенным представляется и то, что в ходе решения учитывается диссипация энергии в процессе отражения волны от цилиндрического препятствия

Рассматривается жесткая (недеформируемая) длинная $-\infty < z < \infty$ круговая цилиндрическая оболочка радиусом R , помещенная в безграничную жидкость с механическими характеристиками ρ , c (ρ — ее плотность, c — скорость звука). Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z , и будем считать, что в жидкости распространяется симметричная относительно плоскостей $z = 0$, $\theta = 0$ волна давления. В исходной математической модели полагаем жидкость идеальной, сжимаемой, а её движение потенциальным (безвихревым), изотермическим, что справедливо при давлениях в жидкости не более 100 МПа [5]. Рассматривается внешняя для цилиндрической оболочки начально-краевая задача гидродинамики в области

$$\Omega: \left\{ r \geq R, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right\}, \quad t \geq 0.$$

Как известно [5], потенциал скоростей $\varphi(r, \theta, t)$ и дифракционное давление $\rho(r, \theta, t)$ жидкости складываются из соответствующего потенциала φ_1 и давления ρ_1 в падающей на цилиндр и отраженной от него φ_2 и ρ_2 волнах, т.е.

$$\varphi(r, \theta, t) = \varphi_1(r, \theta, t) + \varphi_2(r, \theta, t), \quad (1)$$

$$\rho(r, \theta, t) = \rho_1(r, \theta, t) + \rho_2(r, \theta, t). \quad (2)$$

При этом $\varphi_1(r, \theta, t)$ и $\rho_1(r, \theta, t)$ считаются известными, а $\varphi_2(r, \theta, t)$ и $\rho_2(r, \theta, t)$ определяются в результате решения соответствующей начально-краевой задачи. Следует отметить, что φ_1 и φ_2 должны удовлетворять волновому уравнению, т.е.

$$\nabla^2 \varphi_i(r, \theta, t) - c^{-2} \frac{\partial^2 \varphi_i(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (4)$$

а φ_2 — следующим граничным и начальным условиям:

$$\text{при } r = R: \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=R} = - \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=R} = A(\theta, t); \quad (5)$$

$$\text{при } r = R_0 \gg R: \varphi_2(r, \theta, t)|_{r=R_0} = B(\theta, t) \rightarrow 0; \quad (6)$$

$$\varphi_2(r, \theta, t)|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \varphi_2(r, \theta, t)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \right|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0; \quad (7)$$

$$\text{при } t = 0: \varphi_2(r, \theta, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Здесь выражения (5), (6) представляют соответственно условия равенства скоростей на поверхности цилиндрической оболочки (преграды) и затухания (излучения). Соотношения (7) — условия периодичности для круговой области. При этом имеется в виду симметричный характер волнового воздействия, т.е. четность функций $\varphi_2(r, \theta, t) = \varphi_2(r, -\theta, t)$ относительно $\theta = 0$. Равенства (8) являются нулевыми начальными условиями.

Потенциал скоростей связан с функцией давления линеаризованной зависимостью Коши — Лагранжа [3, 5]

$$p_2(r, \theta, t) = -\rho \frac{\partial \varphi_2(r, \theta, t)}{\partial t}, \quad (9)$$

а вектор скорости $\bar{V}_2$ определяется соотношением:

$$\bar{V}_2(r, \theta, t) = \text{grad} \varphi_2(r, \theta, t). \quad (10)$$

Равенства (3)–(8) представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи. Приведем ее к стандартной форме [8]. Учитывая, что задача (3)–(8) линейная, вводим для $\varphi_2(r, \theta, t)$ такое представление:

$$\varphi_2(r, \theta, t) = g_1(r) \cdot A(\theta, t) + g_2(r) \cdot B(\theta, t) + \Phi(r, \theta, t), \quad (11)$$

где $g_1(r)$, $g_2(r)$ — дважды непрерывно-дифференцируемые функции в интервале $r \in [R, R_0]$, а $A(\theta, t)$, $B(\theta, t)$, имея в виду (5), (7), — удовлетворяют условиям периодичности:

$$A(\theta, t)|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = A(\theta, t)|_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \quad B(\theta, t)|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = B(\theta, t)|_{\theta=\frac{\pi}{2}}.$$

Если теперь подставить выражение (11) в дифференциальное уравнение (3) и равенства (5)–(8), то при выполнении соотношений

$$\begin{aligned} g_1'(R) = 1, \quad g_2'(R) = 0 \quad \text{при } r = R, \\ g_1(R_0) = 0, \quad g_2(R_0) = 1 \quad \text{при } r = R_0, \end{aligned} \quad (12)$$

получаем следующую начально-краевую задачу для функции $\Phi(r, \theta, t)$ в стандартной форме (с однородными граничными условиями):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = F(r, \theta, t); \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } r = R \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} &= 0, \\ \text{при } r = R_0 \quad \Phi(R_0, \theta, t) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\Phi\left(r, -\frac{\pi}{2}, t\right) = \Phi\left(r, \frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}; \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } t=0 \quad \Phi(r, \theta, 0) &= \Phi_0(r, \theta), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \dot{\Phi}_0(r, \theta). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Следует отметить, что при удовлетворении функций $g_j(r)$ ($j=1,2$) уравнениям

$$g_j''(r) + r^{-1}g_j'(r) = 0, \quad j=1,2, \quad (17)$$

$F(r, \theta, t)$, $\Phi_0(r, \theta)$, $\dot{\Phi}(r, \theta)$ — определяются такими равенствами:

$$F(r, \theta, t) = c^{-2} [g_1(r)\ddot{A}(\theta, t) + g_2(r)\ddot{B}(\theta, t)] - r^{-2} \left[g_1(r) \frac{\partial^2 A(\theta, t)}{\partial \theta^2} + g_2(r) \frac{\partial^2 B(\theta, t)}{\partial \theta^2} \right], \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(r, \theta) &= -[g_2(r)A(\theta, 0) + g_2(r)B(\theta, 0)], \\ \dot{\Phi}_0(r, \theta) &= -[g_1(r)\dot{A}(\theta, t)|_{t=0} + g_2(r)\dot{B}(\theta, t)|_{t=0}]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Штрих и точка обозначают соответственно дифференцирование по r и t .

Решение уравнения (17) при граничных условиях (12) записывается в виде

$$g_1(r) = R \ln \frac{r}{R_0}, \quad g_2(r) = 1. \quad (20)$$

Замкнутое решение начально-краевой задачи (13)–(16) строится путем применения кратных конечных интегральных преобразований (КИП). Имея в виду четность $\Phi(r, \theta, t)$ в интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, сначала вводится косинус-преобразование Фурье с конечными пределами по переменной θ :

$$\Phi_c(r, \theta, t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(r, \theta, t) \cos n\theta d\theta, \quad (21)$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \Phi_c(r, n, t) \cos n\theta, \quad (22)$$

где в формуле обращения (22)

$$\Omega_n = \begin{cases} \pi, & \text{при } n=0, \\ \pi/2, & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Применяя теперь косинус-преобразование Фурье (21) к дифференциальному уравнению (13), граничным (14) и начальным (16) условиям с учетом равенств (15), получаем:

$$\frac{\partial^2 \Phi_c(r, n, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_c(r, n, t)}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \Phi_c(r, n, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_c(r, n, t)}{\partial t^2} = F_c(r, n, t), \quad (23)$$

$$\text{при } r=R \quad \frac{\partial \Phi_c}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad \text{при } r=R_0 \quad \Phi_c(R_0, n, t) = 0; \quad (24)$$

$$\text{при } t=0 \quad \Phi_c(r, n, 0) = \Phi_{0c}(r, n), \quad \frac{\partial \Phi_c(r, n, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\Phi}_{0c}(r, n). \quad (25)$$

Здесь, по аналогии с (21), $F_c, \Phi_{0c}, \dot{\Phi}_{0c}$ соответствующие косинус – трансформанты Фурье функций $F(r, \theta, t)$, $\Phi_0(r, \theta)$, $\dot{\Phi}_0(r, \theta)$, т.е.

$$F_c(r, n, t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(r, \theta, t) \cos n\theta d\theta, \quad \Phi_{0c}(r, n) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi_0(r, \theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$\dot{\Phi}_{oc}(r, n) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dot{\Phi}_0(r, n) \cos n\theta d\theta. \quad (26)$$

Вводим теперь КИП по пространственной переменной r с неизвестным пока ядром $G(\lambda_{ik}, r)$ и весом $q(r)$ [6]:

$$\Phi_{cG}(\lambda_{in}, n, t) = \int_R^{R_0} q(r) \Phi_c(r, n, t) G(\lambda_{in}, r) dr, \quad (27)$$

$$\Phi_c(r, n, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{cG}(\lambda_{in}, n, t) G(\lambda_{in}, r) \|G_{in}\|^{-2}, \quad (28)$$

где $\|G_{in}\|$ — норма ядра преобразования, т.е.

$$\|G_{in}\|^2 = \int_R^{R_0} q(r) G^2(\lambda_{in}, r) dr, \quad (29)$$

а весовая функция $q(r)$ определяется по коэффициентам $A(r)=1$, $B(r)=1/r$ при $\frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial r^2}$ и $\frac{\partial \Phi_c}{\partial r^2}$ уравнения (23) одной квадратурой [6]. Имеем

$$q(r) = A^{-1}(r) \exp \int B(r) A^{-1}(r) dr = \exp \int r^{-1} dr = r. \quad (30)$$

Применяя конечное интегральное преобразование (27), (30) к дифференциальному уравнению (23), начальным условиям (25) и выполняя интегрирование по частям, находим

$$\left[r \frac{\partial \Phi_c}{\partial r} G - r \Phi_c G' \right]_R^{R_0} + \int_R^{R_0} r \Phi_c \left(G'' + \frac{1}{r} G' - \frac{n^2}{r^2} G \right) dr - \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_R^{R_0} r \Phi_c G dr = \int_R^{R_0} r F_c G dr, \quad (31)$$

при $t=0$ —

$$\int_R^{R_0} r \Phi_c G dr = \int_R^{R_0} r \Phi_{0c} G dr, \quad \frac{d}{dt} \int_R^{R_0} r \Phi_c G dr = \int_R^{R_0} r \dot{\Phi}_{0c} G dr. \quad (32)$$

Используем два условия структурного алгоритма метода КИП [6]:

$$\left[r \frac{\partial \Phi_c}{\partial r} G - r \Phi_c G' \right]_R^{R_0} = 0, \quad (33)$$

$$\int_R^{R_0} r \Phi_c \left(G'' + \frac{1}{r} G' - \frac{n^2}{r^2} G \right) dr = -\lambda_{in}^2 \int_R^{R_0} r \Phi_c G dr. \quad (34)$$

Здесь (и выше) λ_{in} — положительные параметры, образующие счетное множество ($i \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных чисел).

Принимая во внимание соотношения (33), (34) и обозначение трансформанты (27), дифференциальное уравнение (31) и начальные условия (32) можно представить в следующем виде:

$$\ddot{\Phi}_{cG}(\lambda_{in}, n, t) + \omega_{in}^2 \Phi_{cG}(\lambda_{in}, n, t) = -c^2 F_{cG}(\lambda_{in}, n, t), \quad i \in \mathbb{R}, \quad (35)$$

при $t=0$ —

$$\Phi_{cG}(\lambda_{in}, n, 0) = \Phi_{0cG}(\lambda_{in}, n), \quad \dot{\Phi}_{cG}(\lambda_{in}, n, t)|_{t=0} = \dot{\Phi}_{cG}(\lambda_{in}, n), \quad (36)$$

где

$$F_{cG}(\lambda_{in}, n, t) = \int_R^{R_0} r F_c(r, n, t) G(\lambda_{in}, r) dr, \\ \{ \Phi_{0cG}(\lambda_{in}, n), \dot{\Phi}_{ocG}(\lambda_{in}, n) \} = \int_R^{R_0} r \{ \Phi_{0c}(r, n), \dot{\Phi}_{0c}(r, n) \} G(\lambda_{in}, r) dr, \quad (37)$$

а ω_{in} — круговые частоты колебаний жидкости в отраженной волне:

$$\omega_{in} = \lambda_{in} c. \quad (38)$$

Известно [9], что диссипативные силы оказывают несущественное влияние на формы колебаний $G(\lambda_{in}, n) \cos n\theta$ получаемых ниже спектральных разложений, поэтому в соответствии с методом квазинормальных координат, их можно вводить в математическую модель (35), (36) после отделения пространственных переменных.

Если обозначить через γ_{in} безразмерный коэффициент потерь для каждой моды колебаний in , то диссипативный член в уравнении (35), пропорциональный производной по « t » от трансформанты потенциала скоростей Φ_{cG} в предположении его независимости от частоты ω_{in} , записывается следующим образом:

$$T_{cG}(\lambda_{in}, n, t) = \gamma_{in} \omega_{in} \dot{\Phi}_{cG}(\lambda_{in}, n, t). \quad (39)$$

Имея в виду (39), обобщенное уравнение (35) для трансформанты КИП (27) с учетом диссипации принимает вид

$$\ddot{\Phi}_{cG}(\lambda_{in}, n, t) + \gamma_{in} \omega_{in} \dot{\Phi}_{cG}(\lambda_{in}, n, t) + \omega_{in}^2 \Phi_{cG}(\lambda_{in}, n, t) = -c^2 F_{cG}(\lambda_{in}, n, t), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (40)$$

Разыскивая частное решение уравнения (40) методом вариации произвольных постоянных, его общий интеграл с учетом начальных условий (36) представляется таким выражением:

$$\begin{aligned} \Phi_{cG}(\lambda_{in}, n, t) = e^{-\alpha_{in} t} & \left\{ \Phi_{0cG}(\lambda_{in}, n) \left(\cos \beta_{in} t + \frac{\alpha_{in}}{\beta_{in}} \sin \beta_{in} t \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\dot{\Phi}_{0cG}(\lambda_{in}, n)}{\beta_{in}} \sin \beta_{in} t - \frac{c^2}{\beta_{in}} \int_0^t F_{cG}(\lambda_{in}, n, \tau) e^{\alpha_{in} \tau} \sin \beta_{in} (t - \tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{Здесь } \alpha_{in} = \frac{\gamma_{in} \omega_{in}}{2}, \quad \beta_{in} = \omega_{in} \left(1 - \frac{\gamma_{in}^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В случае отсутствия диссипации, т.е. полагая $\gamma_{in} = 0$, $\alpha_{in} = 0$, $\beta_{in} = \omega_{in}$, из равенства (41) следует общее решение уравнения (35). Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{cG}(\lambda_{in}, n, t) = \Phi_{0cG}(\lambda_{in}, n) \cos \omega_{in} t + \frac{\Phi_{0cG}(\lambda_{in}, n)}{\omega_{in}} \sin \omega_{in} t - \\ - \frac{c^2}{\omega_{in}} \int_0^t F_{cG}(\lambda_{in}, \tau) \sin \omega_{in} (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (41_1)$$

Из соотношений (33), (34) следует однородная краевая задача для ядра $G(\lambda_{in}, r)$ КИП (27), (28). Действительно, операционное свойство (34) позволяет сформулировать обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$G''(\lambda_{in}, r) + r^{-1} G'(\lambda_{in}, r) + (\lambda_{in}^2 - n^2 r^{-2}) G(\lambda_{in}, r) = 0, \quad (42)$$

а из равенства (33), представляющего билинейную форму на концах интервала $[R, R_0]$, при наличии (24), следуют граничные условия

$$\text{при } r = R, \quad G(\lambda_{in}, r)|_{r=R} = 0, \quad \text{при } r = R_0, \quad G(\lambda_{in}, R_0) = 0. \quad (43)$$

Заменой независимой переменной $x_{in} = \lambda_{in} r$ уравнение (42) сводится к дифференциальному уравнению Бесселя. Его общее решение записывается в виде

$$G(\lambda_{in}, r) = C_{1n} J_n(\lambda_{in} r) + C_{2n} Y_n(\lambda_{in} r), \quad (44)$$

где $J_n(\lambda_{in} r)$, $Y_n(\lambda_{in} r)$ — цилиндрические функции I-го и II-го рода n -го порядка; C_{1n} , C_{2n} — произвольные постоянные интегрирования.

В результате подстановки выражения (44) в граничные условия (43), формируется однородная алгебраическая система уравнений относительно C_{1n} , C_{2n} . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} C_{1n} J'_n(\lambda_{in} R) + C_{2n} Y'_n(\lambda_{in} R) &= 0, \\ C_{1n} J_n(\lambda_{in} R_0) + C_{2n} Y_n(\lambda_{in} R_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Разыскивая нетривиальные решения последней, приравняем главный детерминант (45) нулю. В результате получаем трансцендентное уравнение для определения собственных значений λ_{in} однородной краевой задачи (42), (43):

$$J'_n(\lambda_{in} R) Y_n(\lambda_{in} R_0) - Y'_n(\lambda_{in} R) J_n(\lambda_{in} R_0) = 0, \quad (46)$$

или воспользовавшись рекуррентными формулами дифференцирования функций Бесселя, окончательно имеем

$$\left[J_{n-1}(\lambda_{in} R) - \frac{n}{\lambda_{in} R} J_n(\lambda_{in} R) \right] Y_n(\lambda_{in} R_0) - \left[Y_{n-1}(\lambda_{in} R) - \frac{n}{\lambda_{in} R} Y_n(\lambda_{in} R) \right] J_n(\lambda_{in} R_0) = 0. \quad (46_1)$$

Если теперь выразить из второго уравнения системы (45) C_{2n} и затем поставить полученное равенство в соотношение (44), то находим выражение для $G(\lambda_{in} r)$ с точностью до постоянной C_{1n} . Принимая, без ограничения общности рассуждений $C_{1n} = Y_n(\lambda_{in} R_0)$, определяем окончательно ядро КИП (27), (28):

$$G(\lambda_{in} r) = Y_n(\lambda_{in} R_0) J_n(\lambda_{in} r) - J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} r). \quad (47)$$

Располагая равенством (47) и пользуясь методикой вычисления соответствующих квадратур [10], определяется норма ядра преобразования (29). В итоге имеем.

$$\begin{aligned} \|G_{in}\|^2 &= \int_R^{R_0} r G^2(\lambda_{in}, r) dr = \frac{1}{2} \left\{ Y_n^2(\lambda_{in} R_0) \left[r^2 J_{n-1}^2(\lambda_{in} r) - 2 \frac{nr}{\lambda_{in}} J_{n-1}(\lambda_{in} r) J_n(\lambda_{in} r) + r^2 J_n^2(\lambda_{in} r) \right] + \right. \\ &+ J_n^2(\lambda_{in} R_0) \left[r^2 Y_{n-1}^2(\lambda_{in} r) - 2 \frac{nr}{\lambda_{in}} Y_{n-1}(\lambda_{in} r) Y_n(\lambda_{in} r) + r^2 Y_n^2(\lambda_{in} r) \right] - 2 J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} R_0) \times \\ &\times \left. \left\{ r^2 J_{n-1}(\lambda_{in} r) Y_{n-1}(\lambda_{in} r) - \frac{nr}{\lambda_{in}} [Y_n(\lambda_{in} r) J_{n-1}(\lambda_{in} r) + J_n(\lambda_{in} r) Y_{n-1}(\lambda_{in} r)] + r^2 J_n(\lambda_{in} r) Y_n(\lambda_{in} r) \right\} \right\} \Big|_R^{R_0}. \end{aligned} \quad (48)$$

В результате последовательного применения к выражению (41) формул обращения обобщенного КИП (28) и косинус-преобразования Фурье (22), окончательно получаем функцию $\Phi(r, \theta, t)$ в виде следующего спектрального разложения:

$$\Phi(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^{-1} \cos \theta \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{CG}(\lambda_{in}, n, t) [Y_n(\lambda_{in} R_0) J_n(\lambda_{in} r) - J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} r)] \|G_{in}\|^{-2}, \quad (49)$$

которое и представляет общее решение начально-краевой задачи (13)–(16).

Воспользовавшись теперь выражением (11), а также равенствами (6), (20) и (49), определяем потенциал скоростей жидкости в отраженной от цилиндрического препятствия (оболочки) волне:

$$\begin{aligned} \varphi_2(r, \theta, t) &= RA(\theta, t) \ln \frac{r}{R_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \cos \theta \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{CG}(\lambda_{in}, n, t) [Y_n(\lambda_{in}, R_0) J_n(\lambda_{in}, r) - \\ &- J_n(\lambda_{in}, R_0) Y_n(\lambda_{in}, r)] \|G_{in}\|^{-2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь, в соответствии с (41), обозначениями трансформант (37), (26) и равенствами (18) функция $\Phi_{CG}(\lambda_{in}, n, t)$ определяется таким соотношением:

$$\begin{aligned} \Phi_{CG}(\lambda_{in}, n, t) &= e^{-\alpha_{in} t} \left\{ \left(\cos \beta_{in} t + \frac{\alpha_{in}}{\beta_{in}} \sin \beta_{in} t \right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R_0} r \Phi_0(r, \theta) G(\lambda_{in}, r) \cos n \theta dr d\theta + \right. \\ &+ \beta_{in}^{-1} \sin \beta_{in} t \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R_0} \eta \dot{\Phi}_0(r, \theta) G(\lambda_{in}, r) \cos n \theta dr d\theta - c^2 \beta_{in}^{-1} R \int_0^t \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R_0} r \ln \frac{r}{R_0} \left[c^{-2} \ddot{A}(\theta, \tau) - \right. \\ &\left. \left. - r^{-2} \frac{\partial^2 A(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} \right] G(\lambda_{in}, r) \cos n \theta e^{\alpha_{in} \tau} \sin \beta_{in}(t - \tau) dr d\theta d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (51)$$

где $G(\lambda_{in} r)$ и $\|G_{in}\|^2$ вычисляются по выражениям (47), (48); λ_{in} – корни трансцендентного уравнения (46₁); $A(\theta, t)$ представляет производную (5) потенциала φ_1 в падающей волне, т.е. нормальную к цилиндрической поверхности компоненту вектора ее скорости; $\Phi_0(r, \theta)$, $\dot{\Phi}_0(r, \theta)$ определяются равенствами (19), (20) и (6).

Путем дифференцирования равенства (50), (51) по формуле (9), получается общее выражение давления $p_2(r, \theta, t)$ в отраженной от препятствия волне:

$$\begin{aligned}
p_2(r, \theta, t) = & -\rho \frac{\partial}{\partial t} [g_1(r)A(\theta, t) + \Phi(r, \theta, t)] = \rho \left\{ R \dot{A}(\theta, t) \ln \frac{r}{R_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \cos n\theta \times \right. \\
& \times \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha_{in} t} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R_0} \left[\Phi_0(r, \theta) \beta_{in}^{-1} (\alpha_{in}^2 + \beta_{in}^2) \sin \beta_{in} t - \dot{\Phi}_0(r, \theta) \left(\cos \beta_{in} t - \frac{\alpha_{in}}{\beta_{in}} \sin \beta_{in} t \right) \right] \times \right. \\
& \times r G(\lambda_{in} r) \cos n\theta dr d\theta + c^2 \int_0^t \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_R^{R_0} F(r, \theta, \tau) e^{\alpha_{in} \tau} \left[\cos \beta_{in} (t - \tau) + \frac{\alpha_{in}}{\beta_{in}} \sin \beta_{in} (t - \tau) \right] r G(\lambda_{in} r) \times \\
& \times \cos n\theta dr d\theta d\tau \left. \right\} \left[Y_n(\lambda_{in} R_0) J_n(\lambda_{in} r) - J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} r) \right] \|G_{in}\|^{-2} \left. \right\}, \quad (52)
\end{aligned}$$

в котором $F(r, \theta, t)$ определяется по формуле (18).

В качестве примера рассматривается дифракция на круговом цилиндре плоской ступенчатой волны давления с фронтом, параллельным оси цилиндра. При этом считаются известными интенсивность ρ_0 распространяющегося с постоянной скоростью V_0 скачка давления (рис. 1, 2).

Р и с. 1. Надвигающийся на цилиндр фронт волны давления

Р и с. 2. Обтекание цилиндра плоской волной

Если обозначить через t время взаимодействия волны с преградой, то координата x надвигающегося фронта равна

$$x_0 = V_0 t = R(1 - \cos \theta).$$

Имея в виду это равенство, давление $\rho_1(r, \theta, t)$ и нормальная к поверхности цилиндра скорость $V_1(r, \theta, t)$ скачка давления (падающей волны) определяются такими зависимостями:

$$\begin{aligned}
V_1(r, \theta, t) &= -V_0 \cos \theta \eta[V_0 t - R(1 - \cos \theta)], \\
\rho_1(r, \theta, t) &= -\rho_0 \eta[V_0 t - R(1 - \cos \theta)], \quad (53)
\end{aligned}$$

где $\eta(\dots)$ — единичная функция Хэвисайда:

$$\eta[V_0 t - R(1 - \cos \theta)] = \begin{cases} 0, & \text{если } V_0 t - R(1 - \cos \theta) < 0 \Rightarrow t < \frac{R}{V_0}(1 - \cos \theta), \\ 1, & \text{если } V_0 t - R(1 - \cos \theta) > 0 \Rightarrow t \geq \frac{R}{V_0}(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

Если проинтегрировать выражения (53) в соответствии с равенствами (9), (10), то немедленно получаем потенциал скоростей $\varphi_1(r, \theta, t)$ в падающей на цилиндр волне. Имеем

$$\varphi_1(r, \theta, t) = - \left(V_0 r \Big|_{r=R} \cos \theta + \frac{\rho_0 t}{\rho} \right) \eta[V_0 t - R(1 - \cos \theta)]. \quad (54)$$

Следует отметить, что в результате подстановки соотношения (54) в (3) получаем тождество, т.е. потенциал $\varphi_1(r, \theta, t)$ удовлетворяет волновому уравнению (3).

Располагая функцией φ_1 (54), по равенствам (5), (18), (19), (20) находим

$$\begin{aligned} A(\theta, t) &= -V_0 \cos \theta \eta [V_0 t - R(1 - \cos \theta)], & \dot{A}(\theta, t) &= \ddot{A}(\theta, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 A(\theta, t)}{\partial \theta^2} &= V_0 \cos \theta \eta [V_0 t - R(1 - \cos \theta)], & \Phi_0(r, \theta) &= \dot{\Phi}_0(r, \theta) = 0, \\ F(r, \theta, t) &= -V_0 R r^2 \ln \frac{r}{R_0} \cos \theta \eta [V_0 t - R(1 - \cos \theta)]. \end{aligned} \quad (55)$$

Потенциал скоростей $\varphi_2(r, \theta, t)$ и давление $p_2(r, \theta, t)$ в отраженной от цилиндра волне определяются разложениями (50)–(52), которые с учетом выражений (55) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_2(r, \theta, t) &= -V_0 R \left\{ \ln \frac{r}{R_0} \cos \theta \eta [V_0 t - R(1 - \cos \theta)] + c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \cos n\theta \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{in}^{-1} e^{-\alpha_{in} t} \times \right. \\ &\times \left\{ \int_0^t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{R}{2}}^{R_0} \cos \theta \cos n\theta e^{\lambda_{in} \tau} \sin \beta_{in} (t - \tau) \eta [V_0 t - R(1 - \cos \theta)] r^{-1} \ln \frac{r}{R_0} [Y_n(\lambda_{in} R_0) J_n(\lambda_{in} r) - \right. \\ &\left. - J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} r)] dr d\theta d\tau \right\} \times [Y_n(\lambda_{in} R_0) J_n(\lambda_{in} r) - J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} r)] \|G_{in}\|^{-2} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} p_2(r, \theta, t) &= \rho V_0 R c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \cos n\theta \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_{in} t} \left\{ \int_0^t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{R}{2}}^{R_0} e^{\lambda_{in} \tau} \left[\cos \beta_{in} (t - \tau) - \frac{\alpha_{in}}{\beta_{in}} \sin \beta_{in} (t - \tau) \right] \times \right. \\ &\times \eta [V_0 t - R(1 - \cos \theta)] r^{-1} \ln \frac{r}{R_0} [Y_n(\lambda_{in} R_0) J_n(\lambda_{in} r) - J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} r)] \cos n\theta dr d\theta d\tau \left. \right\} \times \\ &\times [Y_n(\lambda_{in} R_0) J_n(\lambda_{in} r) - J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} r)] \|G_{in}\|^{-2}. \end{aligned} \quad (57)$$

Если выполнить интегрирование по переменным θ и τ , то разложения (56), (57) можно упростить. В результате имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_2(r, \theta, t) &= -V_0 R \left\{ \ln \frac{r}{R_0} \cos \theta \eta [V_0 t - R(1 - \cos \theta)] + 2c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \cos n\theta \left[\frac{1}{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi}{2} + \right. \right. \\ &+ \frac{1}{n-1} \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \left. \right] \sum_{i=1}^{\infty} e^{\alpha_{in} t} \frac{\lambda_{in} \beta_{in}^{-1}}{\lambda_{in}^2 \beta_{in}} \left[\frac{\beta_{in}}{\lambda_{in}} (e^{\lambda_{in} t} - \cos \beta_{in} t) - \sin \beta_{in} t \right] \eta [V_0 t - R(1 - \cos \theta)] \times \\ &\times \int_R^{R_0} r^{-1} \ln \frac{r}{R_0} [Y_n(\lambda_{in} R_0) J_n(\lambda_{in} r) - J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} r)] dr [Y_n(\lambda_{in} R_0) J_n(\lambda_{in} r) - \\ &- J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} r)] \|G_{in}\|^{-2} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (56_1)$$

соответственно

$$\begin{aligned} p_2(r, \theta, t) &= -2\rho V_0 R c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \frac{\cos n\theta}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_{in} t} \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{in}^2 + \beta_{in}^2} \left(\cos \beta_{in} t - \frac{\alpha_{in}^2 + \beta_{in}^2}{\alpha_{in} \beta_{in}} \sin \beta_{in} t \right) \times \\ &\times \left\{ \int_R^{R_0} r^{-1} \ln \frac{r}{R_0} [Y_n(\lambda_{in} R_0) J_n(\lambda_{in} r) - J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} r)] dr \right\} [Y_n(\lambda_{in} R_0) J_n(\lambda_{in} r) - \\ &- J_n(\lambda_{in} R_0) Y_n(\lambda_{in} r)] \|G_{in}\|^{-2}. \end{aligned} \quad (57_1)$$

Интегралы

$$\int_R^{R_0} r^{-1} \ln \frac{r}{R_0} J_n(\lambda_{in} r) dr \text{ и } \int_R^{R_0} r^{-1} \ln \frac{r}{R_0} Y_n(\lambda_{in} r) dr ,$$

входящие в представления (56₁), (57₁) могут быть вычислены по квадратурным формулам, в частности, по формуле Симпсона.

Полное давление на поверхности цилиндра (цилиндрической оболочки) определяется равенством (2), а также соотношениями (53), (57₁).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Харкевич А. А. Неустановившиеся волновые явления. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 283 с.
2. Мнев Е. Н., Перцев А. К. Гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1970. 286 с.
3. Григолюк Э. И., Горишков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1974. 322с.
4. Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Киев. Наукова думка, 1982. 410 с.
5. Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин. Л.: Судостроение, 1987. 320 с.
6. Сеницкий Ю. Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во СГУ, 1985. 176 с.
7. Сеницкий Ю. Э. Метод конечных интегральных преобразований. Его перспективы в исследовании краевых задач механики (обзор). // Вестник СамГТУ. Сер.: Математическая, 2003. Вып. 22. 2003. С. 10–39.
8. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979. 224с.
9. Цейтлин А. И., Кусаинов А. А. Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкций. Алма-Ата: Наука, 1987. 238 с.
10. Сеницкий Ю. Э. О вычислении некоторых квадратур, содержащих цилиндрические функции // Расчет пространственных строительных конструкций. Сб. тр. Куйб. инж.-строит. инст., 1974. Вып. 4. С. 102–104.

Поступила 22.08.2006 г.