Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Стружанов, Вяч. В. Башуров, Модификационная модель Мазинга, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 29–39

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 12:31:23

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.3

В. В. Стружанов, В. В. Башуров

МОДИФИКАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МАЗИНГА

Известная одномерная структурная модель Мазинга, представляющая систему параллельных стержней при равномерном одноосном деформировании, дополнена условиями разрушения стержней, что позволило прогнозировать наличие падающей ветви на диаграмме деформирования материала, инверсию эффекта Баушингера и отрицательные значения инкрементального (мгновенного) коэффициента поперечной деформации на заключительной (закритической) стадии деформирования.

Введение. В механике деформируемого твердого тела часто применяется подход, заключающийся в рассмотрении материала как совокупности структурных элементов с различными прочностными и деформационными свойствами. Исследование структурных моделей материала позволяет выявить на качественном уровне некоторые его свойства, которые затем полагаются в основу построения определяющих соотношений, предназначенных для расчетов напряженно-деформированного состояния элементов конструкций при сложном нагружении [1-5]. Кроме того, такое моделирование позволяет целенаправленно планировать эксперименты для определения выявленных при исследовании структурной модели свойств материала.

Наиболее известна структурная модель материала Мазинга, в которой материал заменяется системой упругопластических стержней с идеально пластическими свойствами и с различными пределами текучести, находящейся в условиях одноосного растяжения. В данной работе в систему включаются и упруго-хрупкие стержни с различными пределами прочности. Кроме того, предполагается, что после определенной деформации стержни разрушаются, оставаясь при этом в составе системы. Это позволило получить падающую ветвь диаграммы деформирования совокупности стержней и отрицательный мгновенный (инкрементальный) коэффициент поперечной деформации при деформации растяжения, отвечающей падающей ветви. При исследовании разгрузки и последующего сжатия выявлена инверсия эффекта Баушингера. Данная работа представляет аналитическое обобщение исследования модифицированной модели Мазинга, приведенного в статье [6] для конечного числа упруго-идеальнопластических стержней.

Следует отметить, что аналогичный подход, связанный с введением критерия разрушения локального элемента структурной модели, был использован в [4,5] при моделировании падающей ветви диаграммы упругопластического деформирования и третьей стадии ползучести.

1. Стержневая система. Рассмотрим множество тонких, имеющих один и тот же диаметр, параллельных стержней, плотно прилегающих друг к другу. Системе задаем однородную продольную деформацию ε . Полагаем, что расширение или сужение стержней в поперечном направлении происходит свободно, поперечные силы не возникают и не нарушается плотность упаковки, чем обеспечивается совместность поперечной деформации системы. Трением между стержнями пренебрегаем. Таким образом, в стержнях могут быть только напряжения растяжения и сжатия.

В общем случае множество стержней состоит из двух подмножеств. Первое составляют упруго-хрупкие, а второе — упруго-идеальнопластические стержни. Упругие свойства всех стержней одинаковы и определяются модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν . Множество деформаций разрушения упруго-хрупких стержней имеет мощность континуума и определяется отрезком $[\varepsilon_B, \varepsilon^B]$. Множество деформаций перехода в пластическое состояние упруго-идеальнопластических элементов также имеет мощность континуума и определяется отрезком $[\varepsilon_T = \varepsilon_B, \varepsilon^T]$. Свойства стержней на стадии пластичности заданы касательным модулем $E_T = 0$ и коэффициентом поперечной деформации $\nu_T = 0,5$ (идеальная пластичность). Раз-

грузки из пластического состояния происходит для каждого стержня по линейному закону с модулем E . Множество деформаций разрушения упруго-идеальнопластических стержней обладает мощностью континуума и определяется отрезком $[\varepsilon_Z, \varepsilon^Z]$, причем стержни, раньше перешедшие в пластичность, и разрушаются раньше. На рис. 1 показаны взаимное расположение предельных деформаций $\varepsilon_T, \varepsilon^T, \varepsilon_B, \varepsilon^B, \varepsilon_Z, \varepsilon^Z$ и диаграммы деформирования упруго-хрупких стержней (прямая 1) и упруго-идеальнопластических стержней (упругое состояние — прямая 1, пластическое состояние — между прямыми 2 и 3).

Р и с. 1. Свойства стержней

Пусть объемное содержание упруго-хрупких стержней в системе равно γ , а упруго-идеальнопластических — β ($\gamma + \beta = 1$). Плотность распределения деформаций на отрезке $[\varepsilon_B, \varepsilon^B]$ задана функцией $f_1(\varepsilon)$, на отрезке $[\varepsilon_T, \varepsilon^T]$ — функцией $f_2(\varepsilon)$, на отрезке $[\varepsilon_Z, \varepsilon^Z]$ — функцией $f_3(\varepsilon)$. Тогда при произвольной деформации ε объемное содержание разрушенных упруго-хрупких стержней равно $p = \gamma \int_{\varepsilon_B}^{\varepsilon} f_1(z) dz$

($\varepsilon > \varepsilon_B$), а целых — $(\gamma - p)$. Объемное содержание упруго-идеальнопластических стержней, перешедших в пластическое состояние, равно

$q = \beta \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon} f_2(z) dz$ ($\varepsilon > \varepsilon_T$), а оставшихся упругими — $(\beta - q)$. Объемное содержание разрушен-

ных упруго-идеальнопластических стержней равно $b = \beta \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon} f_3(z) dz$ ($\varepsilon > \varepsilon_Z$), а оставшихся целыми — $(\beta - b)$.

Полагаем далее, что при сжатии пределы прочности упруго-хрупких стержней существенно превышают их значения при растяжении, а диаграммы сжатия упруго-идеальнопластических стержней симметричны относительно начала координат диаграммам растяжения. После разрушения стержни остаются в системе, а их целые части разгружаются до нулевых напряжений по линейному закону разгрузки. Отсюда в системе появляются полости. При смене растяжения на сжатие эти полости закрываются и разрушенные стержни снова включаются в работу, обладая при сжатии свойствами целых стержней.

Данная модель представляет материал как совокупность упруго-хрупких и упруго-идеальнопластических элементов. Разрушение упруго-хрупких стержней соответствует процессам хрупкого разрушения по телу зерна, или по границам зерен с образованием микротрещин (континуальное разрушение). Деформирование упруго-идеальнопластических стержней моделирует дислокационный механизм пластической деформации с последующим образованием вязких пор.

2. Система упруго-хрупких стержней ($\beta = 0, \gamma = 1$). Сначала исследуем систему, состоящую из одних упруго-хрупких стержней. Так как напряжение в каждом стержне равно $E\varepsilon$, то суммируя их в общем случае получаем, $F(1-p)E\varepsilon$, где F — площадь поперечного сечения системы стержней, $F(1-p)$ — площадь, занимаемая целыми стержнями. Тогда среднее напряжение в системе равно $E\varepsilon(1-p)$. Аналогично определяется и общая поперечная деформация системы. Итак, среднее напряжение и поперечную деформацию системы стержней при растяжении задают формулы:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_B; \\ E\varepsilon(1-p), & \varepsilon_B \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B. \end{cases} \quad \varepsilon^v = \begin{cases} \nu\varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B; \\ \nu\varepsilon(1-p), & \varepsilon_B \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B. \end{cases}$$

Используя эти выражения, находим касательный (инкрементальный) модуль и мгновенный коэффициент поперечной деформации всей совокупности стержней:

$$E^p = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \begin{cases} E, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B; \\ E(1-p) - E\varepsilon f_1(\varepsilon), & \varepsilon_B < \varepsilon \leq \varepsilon^B. \end{cases} \quad \nu^p = -\frac{d\varepsilon^\nu}{d\varepsilon} = \begin{cases} \nu, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B; \\ \nu(1-p) - \nu\varepsilon f_1(\varepsilon), & \varepsilon_B < \varepsilon \leq \varepsilon^B. \end{cases}$$

Отметим, что справедливо равенство $E^p/E = \nu^p/\nu$.

Если после достижения некоторой деформации растяжения ε_u начать разгрузку, то модуль разгрузки и коэффициент поперечной деформации будут определяться формулами:

$$E^u = \begin{cases} E, & 0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_B; \\ E(1-p_u), & \varepsilon_B \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon^B, \end{cases} \quad \nu^u = \begin{cases} \nu, & 0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_B; \\ \nu(1-p_u), & \varepsilon_B \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon^B, \end{cases}$$

где $p_u = p(\varepsilon_u)$ – объемное содержание разрушенных стержней в момент начала разгрузки.

Справедливо равенство $E^u/E = \nu^u/\nu$.

После полной разгрузки, когда соединились части разрушенных стержней, модуль сжатия будет равен E , а коэффициент поперечной деформации ν .

Пусть деформации разрушения распределены согласно равномерному закону

$$f_1(\varepsilon) = \begin{cases} (\varepsilon^B - \varepsilon_B)^{-1}, & \varepsilon \in [\varepsilon_B, \varepsilon^B]; \\ 0, & \varepsilon \notin [\varepsilon_B, \varepsilon^B] \end{cases}$$

Тогда

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B; \\ E\varepsilon(\varepsilon^B - \varepsilon)/(\varepsilon^B - \varepsilon_B), & \varepsilon_B \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B, \end{cases} \quad -\varepsilon^\nu = \begin{cases} \nu\varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B; \\ \nu\varepsilon(\varepsilon^B - \varepsilon)/(\varepsilon^B - \varepsilon_B), & \varepsilon_B \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B, \end{cases}$$

$$E^p = \begin{cases} E, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B; \\ E(\varepsilon^B - 2\varepsilon)/(\varepsilon^B - \varepsilon_B), & \varepsilon_B < \varepsilon \leq \varepsilon^B, \end{cases} \quad \nu^p = \begin{cases} \nu, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B; \\ \nu(\varepsilon^B - 2\varepsilon)/(\varepsilon^B - \varepsilon_B), & \varepsilon_B < \varepsilon \leq \varepsilon^B, \end{cases}$$

$$E^u = \begin{cases} E, & 0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_B; \\ E(\varepsilon^B - \varepsilon_u)/(\varepsilon^B - \varepsilon_B), & \varepsilon_B \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon^B. \end{cases} \quad \nu^u = \begin{cases} \nu, & 0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_B; \\ \nu(\varepsilon^B - \varepsilon_u)/(\varepsilon^B - \varepsilon_B), & \varepsilon_B \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon^B. \end{cases}$$

На рис. 2 показана диаграмма деформирования системы стержней и прямые разгрузки, подсчитанные по этим формулам для числовых значений $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$, $\varepsilon^B = 0,004$, $\varepsilon_B = 0,001$.

На рис. 3 показано изменение касательного (инкрементального) модуля (сплошная линия) и мгновенного коэффициента поперечной деформации (пунктирная линия) стержневой системы ($\nu = 0,3$).

Р и с. 2. Диаграмма деформирования системы упруго-хрупких стержней

Р и с. 3. Зависимости инкрементальных модулей и коэффициентов поперечной деформации от величины деформации растяжения системы упруго-хрупких стержней

Отметим, что после выхода на нелинейную часть диаграммы деформирования и последующей разгрузки система в области упругости обладает уже различными свойствами при растяжении и при сжатии.

3. Система упруго-идеальнопластических стержней ($\beta = 1$, $\gamma = 0$).

3.1. Свойства при растяжении. Рассмотрим систему, состоящую из одних упруго-идеальнопластических стержней. Запишем сначала выражения, определяющие среднюю упругую деформацию системы при растяжении. Имеем

$$\varepsilon^e = \begin{cases} \varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ \varepsilon(1-q) + \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon} z f_2(z) dz, & \varepsilon_T \leq \varepsilon \leq \varepsilon^T; \\ \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz, & \varepsilon^T \leq \varepsilon \leq \varepsilon_Z; \\ \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz - \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon} [z - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] f_3(z) dz, & \varepsilon_Z \leq \varepsilon \leq \varepsilon^Z. \end{cases} \quad (3.1)$$

Приведем соображения, поясняющие формулы (3.1). Пусть полная деформация системы расположена в отрезке $[\varepsilon_T, \varepsilon^T]$. Суммарная упругая деформация стержней, оставшихся упругими, равна $F(1-q)\varepsilon$. Для вычисления суммарной упругой деформации в стержнях, перешедших в пластическое состояние, воспользуемся тем, что упругая деформация в каждом стержне равна деформации перехода в пластическое состояние. Следовательно, необходимо только просуммировать деформации от ε_T до ε с учетом их веса, заданного функцией распределения $f_3(\xi)$ ($\varepsilon_T \leq \xi \leq \varepsilon^T$). Разобьем отрезок $[\varepsilon_T, \varepsilon]$ на n частичных отрезков $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$, ..., $[\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n]$ ($\varepsilon_0 = \varepsilon_T$, $\varepsilon_n = \varepsilon$). Вычислим приращения объемного содержания стержней, перешедших в пластическое состояние, отвечающие приращениям деформаций $\Delta \varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i$

($i = 1, 2, \dots, n$). Имеем $\Delta q_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} f_2(\xi) d\xi$. Тогда приближенное значение суммы упругих деформаций стержней, перешедших в пластическое состояние, равно $\bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \xi_i F \Delta q_i$, где ξ_i — произвольная деформация из отрезка $[\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i]$. Переходя к пределу при $\max_i \Delta \varepsilon_i \rightarrow 0$, находим

$$\lim \bar{\varepsilon} = F \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon} \xi dq.$$

Вспоминая выражения для q , получаем $dq = f(\varepsilon) d\varepsilon$. Отсюда искомая сумма упругих деформаций определяется выражением $F \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon} z f_2(z) dz$. Наконец, если разделить общую сумму упругих деформаций на площадь F , то получим вторую строчку в выражениях (3.1).

Перейдем к последней строке в выражениях (3.1), когда полная деформация расположена в отрезке $[\varepsilon_Z, \varepsilon^Z]$. Первый член в строке — это средняя упругая деформация системы после перехода всех стержней в пластическое состояние. Второй член — это средняя упругая деформация которую система теряет в результате разрушения стержней. Она вычисляется по методике, аналогичной изложенной выше. А именно, отрезок $[\varepsilon_Z, \varepsilon]$ разбивается на n частичных отрезков. Объемное содержание разрушенных стержней для каждого отрезка равно

$\Delta b_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} f_3(\xi) d\xi$. Упругая составляющая для какой-либо полной деформации из i -ого отрезка есть $[\xi_i - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)]$. Здесь для простоты рассуждений, не нарушая общности, предположено,

что $(\varepsilon^T - \varepsilon_T) = (\varepsilon^Z - \varepsilon_Z)$. Далее приближенное значение суммы упругих деформаций, потерянных системой при разрушении части стержней, равно $\bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n [\xi_i - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] F \Delta b_i$. Устремляя длины частичных отрезков к нулю, получаем $\lim_{\varepsilon_Z} \bar{\varepsilon} = F \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon} [\xi - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] db$. Вспоминая выражения для b , находим, что сумма упругих деформаций, потерянная при разрушении части стержней, определяется выражением $F \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon} [z - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] f_3(z) dz$. Средняя деформация получается делением данного выражения на площадь F .

Запишем теперь поперечную деформацию всей системы, используя выражение для поперечной деформации одного упруго-идеальнопластического стержня:

$$-\eta^V = \int_0^{\varepsilon_k^T} \nu dz + \int_{\varepsilon_k^T}^{\varepsilon} \nu_T dz = \nu \varepsilon_k^T + \nu_T (\varepsilon - \varepsilon_k^T),$$

где η^V — поперечная деформация, ε_k^T — деформация предела текучести k -ого стержня, равная величине упругой деформации, $(\varepsilon - \varepsilon_k^T)$ — величина пластической деформации.

Для определения поперечной деформации системы необходимо знать среднюю пластическую деформацию при растяжении. На участках $[\varepsilon_T, \varepsilon^T]$ и $[\varepsilon^T, \varepsilon_Z]$ она равна разности между полной и средней упругой деформациями (соответственно):

$$\varepsilon - \left[\varepsilon(1-q) + \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz \right], \quad \varepsilon - \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz.$$

На участке $[\varepsilon_Z, \varepsilon^Z]$ пластическая деформация состоит из двух частей. Во-первых, части разрушенных стержней обладают одинаковой пластической (остаточной) деформацией $(\varepsilon_Z - \varepsilon_T)$. Тогда их суммарная остаточная деформация равна $Fb(\varepsilon_Z - \varepsilon_T)$. Во-вторых, суммарная полная деформация целых стержней равна $F(1-b)\varepsilon$, а суммарная упругая деформация определяется разностью

$$F \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz - F \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon} [z - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] f_3(z) dz.$$

Отсюда средняя пластическая деформация равна

$$b(\varepsilon_Z - \varepsilon_T) + (1-b)\varepsilon - \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz + \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon} [z - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] f_3(z) dz.$$

Теперь выражения для поперечной деформации имеют вид

$$-\varepsilon^V = \begin{cases} \nu \varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ \nu \left[\varepsilon(1-q) + \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon} z f_2(z) dz \right] + \nu_T \left[\varepsilon - \varepsilon(1-q) - \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon} z f_2(z) dz \right], & \varepsilon_T \leq \varepsilon \leq \varepsilon^T; \\ \nu \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz + \nu_T \left[\varepsilon - \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz \right], & \varepsilon^T \leq \varepsilon \leq \varepsilon_Z; \\ \nu \left[\int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz - \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon} [z - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] f_3(z) dz \right] + \\ + \nu_T \left[b(\varepsilon_Z - \varepsilon_T) + (1-b)\varepsilon - \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz + \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon} [z - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] f_3(z) dz \right], & \varepsilon_Z \leq \varepsilon \leq \varepsilon^Z. \end{cases}$$

Далее, используя соотношения $\sigma = E\varepsilon^e$, $E^p = d\sigma/d\varepsilon = E d\varepsilon^e/d\varepsilon$, $\nu^p = -d\varepsilon^v/d\varepsilon$, вычислим значения касательного (мгновенного) модуля E^p и мгновенного коэффициента поперечной деформации системы стержней. После некоторых преобразований имеем

$$E^p = \begin{cases} E, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ E(1-q), & \varepsilon_T < \varepsilon \leq \varepsilon^T; \\ 0, & \varepsilon^T < \varepsilon \leq \varepsilon_Z; \\ -E(\varepsilon - \varepsilon_Z + \varepsilon_T)f_3(\varepsilon), & \varepsilon_Z < \varepsilon \leq \varepsilon^Z, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\nu^p = \begin{cases} \nu, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ (\nu - \nu_T)(1-q) + \nu_T, & \varepsilon_T < \varepsilon \leq \varepsilon^T; \\ \nu_T, & \varepsilon^T < \varepsilon \leq \varepsilon_Z; \\ -(\nu - \nu_T)(\varepsilon - \varepsilon_Z + \varepsilon_T)f_3(\varepsilon) + \nu_T(\varepsilon_Z - \varepsilon_T)f_3(\varepsilon) + \nu_T(1-b) - \nu_T\varepsilon f_3(\varepsilon), & \varepsilon_Z < \varepsilon \leq \varepsilon^Z. \end{cases} \quad (3.3)$$

На рис. 4 приведена диаграмма деформирования системы стержней (кривая 1) при $\varepsilon_T = 0,001$, $\varepsilon^T = 0,0025$, $\varepsilon_Z = 0,005$, $\varepsilon^Z = 0,0065$. Плотности распределения заданы нормальными законами $f_2(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}d_2} e^{-\frac{(\varepsilon-m_2)^2}{2d_2^2}}$ и $f_3(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}d_3} e^{-\frac{(\varepsilon-m_3)^2}{2d_3^2}}$, где математические ожидания $m_2 = (\varepsilon_T + \varepsilon^T)/2$ и $m_3 = (\varepsilon_Z + \varepsilon^Z)/2$, среднеквадратические отклонения $\sqrt{d_2} = (\varepsilon^T - \varepsilon_T)/6$ и $\sqrt{d_3} = (\varepsilon^Z - \varepsilon_Z)/6$. При задании нормальных законов использовали правило трех сигм, т.е. полагали, что отрезки $[\varepsilon_T, \varepsilon^T]$, $[\varepsilon^T, \varepsilon_Z]$ имеют длину, равную шести среднеквадратическим отклонениям.

На рис. 5 изображены графики, отражающие изменения при растяжении мгновенного (инкрементального) модуля (сплошная линия) и мгновенного коэффициента поперечной деформации (пунктирная линия).

Р и с. 4. Диаграмма деформирования и линии разгрузки системы упруго – идеальнопластических стержней

Р и с. 5. Зависимости инкрементального модуля E^p и коэффициента ν^p при растяжении системы упруго-идеальнопластических стержней

3.2. Свойства системы при разгрузке и последующем сжатии. Будем производить разгрузку после достижения деформацией некоторого значения ε_u . Очевидно, что модуль разгрузки $E^u = E$ и коэффициент поперечной деформации при разгрузке $\nu^u = \nu$, если $0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_Z$. Когда $\varepsilon_Z \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon^Z$, то часть стержней разрушена и их объемное содержание равно $b_u = b(\varepsilon_u)$. В силу того, что по принятому выше допущению пластическая деформация всех стержней одинакова и равняется $(\varepsilon_Z - \varepsilon_T)$, в системе имеют место полости с относительным размером

$[\varepsilon_u - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)]$. Отсюда до деформации $(\varepsilon_Z - \varepsilon_T)$ разгрузка характеризуется величинами $E^u = E(1 - b_u)$, $\nu^u = \nu(1 - b_u)$. При дальнейшем уменьшении деформации, когда полости закрылись и разрушенные стержни включились в работу, имеем $E^u = E$, $\nu^u = \nu$.

Если $0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_T$, то после разгрузки и последующем сжатии предел текучести системы стержней (переход на нелинейную часть диаграммы сжатия), очевидно, наступит при $\varepsilon_c = -\varepsilon_T$. Тогда $\sigma_c^T = -\sigma_T = -E\varepsilon_T$.

Пусть разгрузка происходит, когда $\varepsilon_T \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_Z$. При сжатии после разгрузки первым перейдет в пластическое состояние стержень, обладающий наибольшей пластической деформацией при растяжении, которая равна $(\varepsilon_u - \varepsilon_T)$. Это произойдет тогда, когда деформация системы достигнет величины $(\varepsilon_u - 2\varepsilon_T)$. Имеем

$$-\sigma_c^T = \begin{cases} E[\varepsilon_u^p - (\varepsilon_u - 2\varepsilon_T)] = E\left[\varepsilon_u - \varepsilon_u(1 - q_u) - \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon_T} z f_2(z) dz - (\varepsilon_u - 2\varepsilon_T)\right], & \varepsilon_T < \varepsilon_u \leq \varepsilon^T; \\ E[\varepsilon_u^p - (\varepsilon_u - 2\varepsilon_T)] = E\left[\varepsilon_u - \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon_T} z f_2(z) dz - (\varepsilon_u - 2\varepsilon_T)\right], & \varepsilon^T < \varepsilon_u \leq \varepsilon_Z, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $\varepsilon_u^p = \varepsilon_u - \varepsilon_u^e$, $q_u = q_u(\varepsilon_u)$. Смысл формул (3.4) проиллюстрирован на рис. 6.

Если деформация растяжения, с которой начинается разгрузка, расположена в отрезке $[\varepsilon_Z, \varepsilon^Z]$, то в момент начала разгрузки в системе имеются полости. Они закрываются тогда, когда деформация системы достигнет величины $(\varepsilon_Z - \varepsilon_T)$. Уменьшение деформации еще на величину ε_T приводит к переходу в состояние пластичности стержня, обладающего наименьшим пределом текучести при растяжении. Диаграмма деформирования при сжатии с этого момента становится нелинейной. Используя эти соображения, находим, что

$$-\sigma_c^T = E\varepsilon_T - [\sigma_u - E(1 - b_u)(\varepsilon_u - \varepsilon_Z + \varepsilon_T)], \quad \varepsilon_Z < \varepsilon_u \leq \varepsilon^Z. \quad (3.5)$$

Здесь $\sigma_u = E\varepsilon_u^e = E\left\{\int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon_T} z f_2(z) dz - \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon_u} [z - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] f_3(z) dz\right\}$. Данное выражение получено с использованием формул (3.1) и является средним напряжением в момент начала разгрузки.

Смысл формулы (3.5) проиллюстрирован на рис. 7.

На рис. 4 показаны прямые и ломаные линии разгрузки, на которых отмечены пределы текучести системы при сжатии, соединенные пунктирной линией 2. Видно, что при разгрузке с падающей ветви пределы текучести при последующем сжатии возрастают.

Примечание. В силу неравномерности пластической деформации в стержнях при полном снятии растягивающей нагрузки в системе появятся остаточные напряжения. При этом стержни с меньшей пластической де-

Р и с. 6. Схема для определения предела текучести при сжатии (разгрузка с восходящей ветви)

Р и с. 7. Схема для определения предела текучести при сжатии (разгрузка с падающей ветви)

формацией будут растянуты, а с большей – сжаты. Наибольшую пластическую деформацию имеет стержень с пределом текучести $E\varepsilon_T$ (разгрузка производится еще до разрушения стержней). Поэтому в конце разгрузки он будет иметь наибольшее сжимающее напряжение. При дальнейшем сжатии системы этот стержень первым перейдет в пластическое состояние при напряжении сжатия по модулю меньшим $E\varepsilon_T$. Отсюда предел прочности системы при сжатии уменьшается, по сравнению с пределом текучести при растяжении (эффект Баушингера).

4. Общий случай ($\beta, \gamma \neq 0$).

4.1. Свойства системы стержней при растяжении. Пусть система содержит как упруго-хрупкие, так и упруго-идеальнопластические стержни. Используя результаты, приведенные выше, можно записать выражения для средней упругой деформации системы при растяжении. Имеем

$$\varepsilon^e = \begin{cases} \varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ \varepsilon(\beta - q) + \beta \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon} z f_2(z) dz + \varepsilon(\gamma - p), & \varepsilon_T \leq \varepsilon \leq \varepsilon^T; \\ \beta \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz + \varepsilon(\gamma - p), & \varepsilon^T \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B; \\ \beta \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz, & \varepsilon^B \leq \varepsilon \leq \varepsilon_Z; \\ \beta \left\{ \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz - \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon} [z - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] f_3(z) dz \right\}, & \varepsilon_Z \leq \varepsilon \leq \varepsilon^Z. \end{cases}$$

Для поперечной деформации получаем выражения

$$-\varepsilon^v = \begin{cases} \nu \varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ \nu \varepsilon(\gamma - p) + \nu \left[\varepsilon(\beta - q) + \beta \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon} z f_2(z) dz \right] + \nu_T \left[\beta \varepsilon - \varepsilon(\beta - q) - \beta \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon} z f_2(z) dz \right], & \varepsilon_T \leq \varepsilon \leq \varepsilon^T; \\ \nu \varepsilon(\gamma - p) + \nu \beta \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz + \nu_T \left[\beta \varepsilon - \beta \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz \right], & \varepsilon^T \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B; \\ \nu \beta \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz + \nu_T \left[\beta \varepsilon - \beta \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz \right], & \varepsilon^B \leq \varepsilon \leq \varepsilon_Z; \\ \nu \beta \left[\int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz - \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon} [z - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] f_3(z) dz \right] + \nu_T [b(\varepsilon_Z - \varepsilon_T) + (\beta - b)\varepsilon - \\ - \beta \int_{\varepsilon_T}^{\varepsilon^T} z f_2(z) dz + \beta \int_{\varepsilon_Z}^{\varepsilon} [z - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)] f_3(z) dz], & \varepsilon_Z \leq \varepsilon \leq \varepsilon^Z. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{E^p}{E} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ (\beta - q) + (\gamma - p) - \gamma \varepsilon f_1(\varepsilon), & \varepsilon_T < \varepsilon \leq \varepsilon^T; \\ (\gamma - p) - \gamma \varepsilon f_1(\varepsilon), & \varepsilon^T < \varepsilon \leq \varepsilon^B; \\ 0, & \varepsilon^B < \varepsilon \leq \varepsilon_Z; \\ -\beta(\varepsilon - \varepsilon_Z + \varepsilon_T) f_3(\varepsilon), & \varepsilon_Z < \varepsilon \leq \varepsilon^Z, \end{cases}$$

$$v^p = \begin{cases} v, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ v(\gamma - p) - v\varepsilon\gamma f_1(\varepsilon) + v(\beta - q) + v_T\beta - v_T(\beta - q), & \varepsilon_T < \varepsilon \leq \varepsilon^T; \\ v(\gamma - p) - v\varepsilon\gamma f_1(\varepsilon) + v_T\beta, & \varepsilon^T < \varepsilon \leq \varepsilon^B; \\ v_T\beta, & \varepsilon^B < \varepsilon \leq \varepsilon_Z; \\ -v\beta(\varepsilon - \varepsilon_Z + \varepsilon_T)f_3(\varepsilon) + v_T[\beta(\varepsilon_Z - \varepsilon_T)f_3(\varepsilon) + (\beta - b) - \\ - \varepsilon\beta f_3(\varepsilon) + \beta(\varepsilon - \varepsilon_Z + \varepsilon_T)f_3(\varepsilon)], & \varepsilon_Z < \varepsilon \leq \varepsilon^Z. \end{cases}$$

На рис. 8 показана диаграмма деформирования системы (кривая 1), построенная для численных значений параметров стержней, приведенных в предыдущих разделах. Объемное содержание упруго-хрупких и упруго-идеальнопластических стержней равны ($\beta = \gamma = 0,5$). Плотность

распределения $f_1(\varepsilon)$ задана нормальным законом $f_1(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_3}} e^{-\frac{(\varepsilon - m_3)^2}{2d_3}}$, где

$$m_3 = (\varepsilon_B + \varepsilon^B)/2, \quad \sqrt{d_3} = (\varepsilon^B - \varepsilon_B)/6.$$

На рис. 9 изображены графики, отражающие изменения при растяжении мгновенного модуля (сплошная линия) и мгновенного коэффициента поперечной деформации (пунктирная линия).

Р и с. 8. Диаграмма деформирования для общего случая

Р и с. 9. Изменение инкрементальных характеристик системы в общем случае

4.2. Свойства при разгрузке и последующем сжатии. Пусть деформация растяжения в начале разгрузки $\varepsilon_u \leq \varepsilon_Z$. Тогда

$$E^u = \begin{cases} E, \\ \beta E + (\gamma - p_u)E = E(1 - p_u), \end{cases} \quad v^u = \begin{cases} v, & 0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_T; \\ v(1 - p_u), & \varepsilon_T \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_Z. \end{cases}$$

Здесь $p_u = p(\varepsilon_u)$ — объемное содержание разрушенных к моменту начала разгрузки упруго-хрупких стержней ($0 < \gamma < 1$). Если после разгрузки производить сжатие, то при достижении деформации системы нулевого значения, когда в работу включаются все разрушенные стержни, имеем $E^u = E$, $v^u = v$.

Рассмотрим теперь разгрузку из точек второй падающей ветви ($\varepsilon_Z < \varepsilon_u \leq \varepsilon^Z$). В начале разгрузки объемное содержание целых упруго-идеальнопластических стержней — $(\beta - b_u)$, разрушенных упруго-идеальнопластических — b_u , разрушенных упруго-хрупких — γ . Разрушенные упруго-идеальнопластические стержни образуют полости с относительным размером

$[\varepsilon_u - (\varepsilon_Z - \varepsilon_T)]$, а разрушенные упруго-хрупкие стержни образуют полости с относительным размером ε_u . Поэтому до деформации $(\varepsilon_Z - \varepsilon_T)$ имеем

$$E_1^u = E(\beta - b_u), \quad \nu_1^u = \nu(\beta - b_u).$$

Здесь $b_u = b(\varepsilon_u)$, $0 < \beta < 1$. При дальнейшем уменьшении деформации системы включаются в работу разрушенные упруго-идеальнопластические стержни. Тогда после деформации разгрузки, равной $(\varepsilon_Z - \varepsilon_T)$, получаем

$$E_2^u = \beta E, \quad \nu_2^u = \nu\beta.$$

И, наконец, когда при сжатии после полной разгрузки деформация системы становится равной нулю, и включаются в работу все разрушенные стержни, имеем $E^u = E$, $\nu^u = \nu$ при условии сохранения упругости.

Определяем, наконец, пределы текучести системы при сжатии (момент перехода на нелинейную часть диаграммы деформирования при сжатии). Если $0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_T$, то, очевидно, $\sigma_c^T = -\sigma_T = -E\varepsilon_T$. Если $\varepsilon_T < \varepsilon_u \leq \varepsilon_Z$, то при сжатии первым в пластическое состояние переходит самый пластичный стержень системы, имеющий предел текучести σ_T . Это произойдет тогда, когда деформация сжатия станет равной $(\varepsilon_u - 2\varepsilon_T)$. Здесь возможны два варианта, а именно, $\varepsilon_u - 2\varepsilon_T \leq 0$ и $\varepsilon_u - 2\varepsilon_T > 0$. В первом случае (рис. 10)

$$\sigma_c^T = -E^u \varepsilon_u^p - E(2\varepsilon_T - \varepsilon_u) = -E^u (\varepsilon_u - \sigma_u / E^u) - E(2\varepsilon_T - \varepsilon_u).$$

Здесь $\sigma_u = E\varepsilon_u^e$, где ε_u^e вычисляется по формулам (4.1). Во втором случае (рис. 11)

$$\sigma_c^T = -E^u [\varepsilon_u^p - (\varepsilon_u - 2\varepsilon_T)] = -E^u [\varepsilon_u - \sigma_u / E^u - (\varepsilon_u - 2\varepsilon_T)] = -E^u (2\varepsilon_T - \sigma_u / E^u).$$

Р и с. 10. Схема для определения предела текучести при сжатии ($\varepsilon_u - 2\varepsilon_T \leq 0$)

Р и с. 11. Схема для определения предела текучести при сжатии ($\varepsilon_u - 2\varepsilon_T > 0$)

Пусть теперь $\varepsilon_Z < \varepsilon_u \leq \varepsilon^Z$. Используя схему, изображенную на рис. 7, где модули разгрузки, производимой со второй падающей ветви, необходимо заменить на модули, указанные на рис. 8, находим

$$-\sigma_c^T = -E_2^u \varepsilon_T - [\sigma_u - E_1^u (\varepsilon_u - \varepsilon_Z + \varepsilon_T)].$$

Здесь для определенности считаем $(\varepsilon_Z - 2\varepsilon_T) \geq 0$.

На рис. 8 показаны линии разгрузки, на которых отмечены пределы текучести системы при сжатии, соединенные пунктирной линией 2. Вновь отмечается инверсия эффекта Баушингера.

5. Заключение. Сформулируем полученные при исследовании модификационной модели Мазинга основные закономерности, которые могут проявляться и при деформировании реальных материалов.

1. Жесткое нагружение с контролем по деформациям позволяет выявить на диаграмме деформирования падающие ветви, когда рост деформации сопровождается падением средних напряжений. Падающая ветвь соответствует физически неустойчивому состоянию материала.

Эта неустойчивость вызвана разрушением элементов системы, что эквивалентно уменьшению площади эффективного, т.е. несущего фактически нагрузку, сечения.

2. На падающих ветвях диаграммы инкрементальные модули материала отрицательны.

3. Мгновенные коэффициенты поперечной деформации тоже могут принимать отрицательные значения. Это обусловлено тем, что при деформировании имеют место два конкурирующих процесса. Растяжение сопровождается уменьшением поперечного сечения элементов, но при их разрушении, когда целые части разгружаются, происходит расширение. На падающей ветви из-за многочисленных разрушений процесс расширения превалирует.

4. Модуль разгрузки из-за разрушения части элементов уменьшается (выползает). При разгрузке с падающей ветви и последующим сжатии этот модуль по мере уменьшения деформации начинает возрастать из-за включения в работу разрушенных элементов. Таким образом, нарушается пропорциональность напряжений и деформаций, и линия разгрузки представляет собой некоторую кривую (в рассмотренном частном случае – ломанную линию).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гохфельд Д. А., Садаков О. С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
2. Ромалис Н. Б., Тамуж В. П. Разрушение структурно-неоднородных тел. Рига: Зинатне, 1989. 224 с.
3. Келлер И. Э., Кузнецова В. Г., Новокианов Р. С. Сравнение двух моделей упругопластичности, обобщающих модель Мазинга на случай сложного нагружения // Математическое моделирование систем и процессов. Сб. науч. тр. Пермь: ПГТУ, 1996. № 4. С. 73–78.
4. Радченко В. П., Еремин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение – 1, 2004. 265 с.
5. Радченко В. П., Небогина Е. В., Басов М. В. Структурно-феноменологический подход к описанию полной диаграммы упругопластического деформирования // Известия вузов. Машиностроение, 2000. № 5–6. С. 3–13.
6. Миронов В. И., Стружанов В. В., Миронов П. В., Седов Ю. Н. Особенности деформирования структурно-неоднородного материала на стадии предразрушения // Динамика, прочность и износостойкость машин. Международный журнал на электронных носителях. 1998, вып. 4. С. 73–78.

Поступила 26.09.2006 г.

УДК 539.374

Б. Ф. Иванов, Ю. И. Кадашевич, С. П. Помяткин

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Решается задача о возможности появления немонотонного поведения кривых «напряжения - деформации» в эндохронной теории неупругости и возможности расширения понятия меры деформации.

Уже достаточно давно экспериментально были обнаружены факты немонотонного поведения кривых связи напряжений и деформаций при простом (монотонном) деформировании и нагружении. Отметим здесь работы Портевена–ЛеШателье [1], Савара [2], Массона [3], своеобразные кривые деформирования в экспериментах Монтелье [4]. Теоретически в рамках феноменологического подхода указанные явления до сих пор не находят единого удовлетворительного описания. Все упомянутые явления и аналогичные им, начиная с эффекта Пойнтинга [5] и осцилляции напряжений Рубина [6], и заканчивая явлением ретчета [7] и эффектом Малышева [8, 9], могут быть названы, следуя работе [10], эффектами второго порядка. Предложенная авторами в работе [11] эндохронная теория неупругости, учитывающая конечные деформации, качественно описывает ряд перечисленных эффектов [12–14].

1. Используется простейший вариант эндохронной теории неупругости для больших деформаций в виде [12]:

$$\begin{aligned} \tau \dot{\sigma} + \sigma |D| &= 2G \left(\tau D + k \varepsilon |D| \right), \quad \dot{\varepsilon} = D, \quad \Omega = \dot{Q} Q^T, \\ \dot{\varepsilon} + \varepsilon \Omega - \Omega \varepsilon &= \dot{\varepsilon}, \quad |D| = \sqrt{D : D}. \end{aligned} \quad (1)$$