Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Ф. Иванов, Ю. И. Кадашевич, С. П. Помыткин, Некоторые вопросы неупругого деформирования материалов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 39–44

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 08:28:38

Эта неустойчивость вызвана разрушением элементов системы, что эквивалентно уменьшению площади эффективного, т.е. несущего фактически нагрузку, сечения.

2. На падающих ветвях диаграммы инкрементальные модули материала отрицательны.

3. Мгновенные коэффициенты поперечной деформации тоже могут принимать отрицательные значения. Это обусловлено тем, что при деформировании имеют место два конкурирующих процесса. Растяжение сопровождается уменьшением поперечного сечения элементов, но при их разрушении, когда целые части разгружаются, происходит расширение. На падающей ветви из-за многочисленных разрушений процесс расширения превалирует.

4. Модуль разгрузки из-за разрушения части элементов уменьшается (выползается). При разгрузке с падающей ветви и последующим сжатии этот модуль по мере уменьшения деформации начинает возрастать из-за включения в работу разрушенных элементов. Таким образом, нарушается пропорциональность напряжений и деформаций, и линия разгрузки представляет собой некоторую кривую (в рассмотренном частном случае – ломанную линию).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гохфельд Д. А., Садаков О. С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
2. Ромалис Н. Б., Тамуж В. П. Разрушение структурно-неоднородных тел. Рига: Зинатне, 1989. 224 с.
3. Келлер И. Э., Кузнецова В. Г., Новокианов Р. С. Сравнение двух моделей упругопластичности, обобщающих модель Мазинга на случай сложного нагружения // Математическое моделирование систем и процессов. Сб. науч. тр. Пермь: ПГТУ, 1996. № 4. С. 73–78.
4. Радченко В. П., Еремин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение – 1, 2004. 265 с.
5. Радченко В. П., Небогина Е. В., Басов М. В. Структурно-феноменологический подход к описанию полной диаграммы упругопластического деформирования // Известия вузов. Машиностроение, 2000. № 5–6. С. 3–13.
6. Миронов В. И., Стружанов В. В., Миронов П. В., Седов Ю. Н. Особенности деформирования структурно-неоднородного материала на стадии предразрушения // Динамика, прочность и износостойкость машин. Международный журнал на электронных носителях. 1998, вып. 4. С. 73–78.

Поступила 26.09.2006 г.

УДК 539.374

Б. Ф. Иванов, Ю. И. Кадашев, С. П. Помяткин

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Решается задача о возможности появления немонотонного поведения кривых «напряжения - деформации» в эндохронной теории неупругости и возможности расширения понятия меры деформации.

Уже достаточно давно экспериментально были обнаружены факты немонотонного поведения кривых связи напряжений и деформаций при простом (монотонном) деформировании и нагружении. Отметим здесь работы Портевена–ЛеШателье [1], Савара [2], Массона [3], своеобразные кривые деформирования в экспериментах Монтелье [4]. Теоретически в рамках феноменологического подхода указанные явления до сих пор не находят единого удовлетворительного описания. Все упомянутые явления и аналогичные им, начиная с эффекта Пойнтинга [5] и осцилляции напряжений Рубина [6], и заканчивая явлением ретчета [7] и эффектом Малышева [8, 9], могут быть названы, следуя работе [10], эффектами второго порядка. Предложенная авторами в работе [11] эндохронная теория неупругости, учитывающая конечные деформации, качественно описывает ряд перечисленных эффектов [12–14].

1. Используется простейший вариант эндохронной теории неупругости для больших деформаций в виде [12]:

$$\begin{aligned} \tau \dot{\sigma} + \sigma |D| &= 2G \left(\tau D + k \varepsilon |D| \right), \quad \dot{\varepsilon} = D, \quad \Omega = \dot{Q} Q^T, \\ \dot{\varepsilon} + \varepsilon \Omega - \Omega \varepsilon &= \dot{\varepsilon}, \quad |D| = \sqrt{D : D}. \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношения (1) в безындексной форме входят: τ — аналог деформационного предела текучести; σ , ε — девиаторы тензоров напряжений и деформаций; G — модуль сдвига; k — аналог коэффициента упрочнения; Q — ортогональный тензор поворота; Ω — тензор спина; D — девиатор тензора скоростей деформаций. Кроме того, здесь используются следующие связи:

$$\varepsilon_{ii} = \sigma_{ii}/K, \quad D = (L + L^T)/2, \quad L = \dot{F} F^{-1}, \quad Q = F u^{-1},$$

где K — объемный модуль; F — тензор градиента деформаций; L — скорость градиента деформаций; u — правый тензор удлинения в полярном разложении тензора $F = Qu$.

Рассмотрим случай, когда градиент деформаций имеет достаточно простой вид

$$F = \begin{pmatrix} a_1 & mb & 0 \\ b & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$F^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_2 & -mb & 0 \\ -b & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta/a_3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = a_1 a_2 - mb^2.$$

Тогда ортогональный тензор поворота Q имеет следующую структуру:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что в этом случае

$$\dot{a}_1 a_2 - mb \dot{b} = \Delta \cdot D_{11}, \quad \dot{a}_2 a_1 - mb \dot{b} = \Delta \cdot D_{22}, \quad \dot{b}(a_2 + m a_1) - b(\dot{a}_2 + m \dot{a}_1) = 2 \cdot \Delta \cdot D_{12}. \quad (2)$$

Кроме того,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b(m-1)}{a_1 + a_2}, \quad \frac{\dot{a}_3}{a_3} = D_{33}, \quad D_{13} = D_{23} = 0. \quad (3)$$

Изучается задача, когда $D_{11} \neq 0$, $D_{22} \neq 0$, $D_{22} = -D_{11}$, $D_{12} \neq 0$, $D_{13} = D_{23} = 0$. Тогда система определяющих уравнений (1) примет вид:

$$\dot{\varepsilon}_{11} + q \varepsilon_{12} = D_{11}, \quad \dot{\varepsilon}_{12} - q \varepsilon_{11} = D_{12}, \quad (4)$$

$$\dot{\sigma}_{11} + \frac{\sigma_{11}}{\tau} |D| + q \sigma_{12} = 2G \left(D_{11} + \frac{k}{\tau} \varepsilon_{11} |D| \right), \quad \dot{\sigma}_{12} + \frac{\sigma_{12}}{\tau} |D| - q \sigma_{11} = 2G \left(D_{12} + \frac{k}{\tau} \varepsilon_{12} |D| \right),$$

$$2\dot{\beta} = -q. \quad (5)$$

Введем новые обозначения:

$$\sigma = \sigma_{11} + i \sigma_{12}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} + i \varepsilon_{12}, \quad D = D_{11} + i D_{12}. \quad (6)$$

Эти величины назовем комплексным напряжением, комплексной деформацией и комплексной скоростью деформации, соответственно. Уравнения (4) и (5) в соответствии с обозначениями (6) принимают вид:

$$\dot{\varepsilon} - i q \varepsilon = D, \quad \dot{\sigma} + \left(\frac{|D|}{\tau} - i q \right) \sigma = 2G \left(D + \frac{k}{\tau} |D| \varepsilon \right). \quad (7)$$

При начальных условиях $\sigma(0) = 0$, $\varepsilon(0) = 0$ и задании тензора D нетрудно получить решение

$$\varepsilon = \int_0^t D(\xi) \cdot \{ \cos[B(t) - B(\xi)] - i \sin[B(t) - B(\xi)] \} d\xi,$$

$$\frac{\sigma}{2G} = \int_0^t \left[D(\xi) + \frac{k}{\tau} |D(\xi)| \varepsilon \right] \cdot \exp(C(\xi) - C(t)) \cdot \{ \cos[B(t) - B(\xi)] - i \sin[B(t) - B(\xi)] \} d\xi.$$

Здесь

$$B(t) = -\int_0^t q(\xi) d\xi, \quad C(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t |D(\xi)| d\xi.$$

Отделяя вещественные и мнимые части решения, получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(t) &= \int_0^t \left\{ D_{11}(\xi) \cdot \cos[B(t) - B(\xi)] + D_{12}(\xi) \cdot \sin[B(t) - B(\xi)] \right\} d\xi, \\ \varepsilon_{12}(t) &= \int_0^t \left\{ D_{12}(\xi) \cdot \cos[B(t) - B(\xi)] - D_{11}(\xi) \cdot \sin[B(t) - B(\xi)] \right\} d\xi, \\ \frac{\sigma_{11}(t)}{2G} &= \int_0^t \exp[C(\xi) - C(t)] \cdot \left\{ \left[D_{11}(\xi) + \frac{k}{\tau} |D(\xi)| \varepsilon_{11} \right] \cdot \cos[B(t) - B(\xi)] + \right. \\ &\quad \left. + \left[D_{12}(\xi) + \frac{k}{\tau} |D(\xi)| \varepsilon_{12} \right] \cdot \sin[B(t) - B(\xi)] \right\} d\xi, \\ \frac{\sigma_{12}(t)}{2G} &= \int_0^t \exp[C(\xi) - C(t)] \cdot \left\{ \left[D_{12}(\xi) + \frac{k}{\tau} |D(\xi)| \varepsilon_{12} \right] \cdot \cos[B(t) - B(\xi)] - \right. \\ &\quad \left. - \left[D_{11}(\xi) + \frac{k}{\tau} |D(\xi)| \varepsilon_{11} \right] \cdot \sin[B(t) - B(\xi)] \right\} d\xi.\end{aligned}$$

2. Рассмотрим важный частный случай, когда

$$D_{11} = 0, \quad D_{12} = D_{12}^0 = \text{const}, \quad k = 0. \quad (8)$$

Предположим, что $q(t)$ локально интегрируема на $[0, +\infty)$, тогда можно показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{11}(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{12}(t) = D_{12}^0$. Кроме того, если $q(t)$ монотонно убывает, $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$ и существует $\beta = \int_0^\infty q(t) dt \leq \frac{\pi}{2}$, то $\dot{\sigma}_{12}(t) > 0$.

Монотонное возрастание σ_{12} возможно и при $\beta > \frac{\pi}{2}$. Приведем характерный пример:

$$m = k_0^2, \quad q = \frac{1 - k_0^2}{k_0^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{(1 + k_0^2)}{2k_0} \cdot \text{sh} \frac{2k}{1 + k_0^2} t \right]^2}.$$

Если $m = 0$, то $q = \frac{1}{1 + t^2}$ и $\int_0^\infty q dt = \pi$. На рис. 1 для этого случая приведено изменение сдвигового и осевого напряжения от времени ($\tau = 1$, $2G = 1$, $k = 0$, $m = 0$).

Р и с. 1. Изменение осевого (а) и сдвигового (б) напряжений от времени: $\tau = 1$, $2G = 1$, $k = 0$, $m = 0$

3. Рассмотрим случай, когда помимо (8) выполняется условие $q = q_\infty = \text{const}$. Тогда, если $q = 0$, то система (4)–(5) имеет единственную точку покоя $Q(0, 1)$, являющуюся центром, и решение $\sigma(t)$, начинающееся в точке $(0, 0)$, идет в эту точку по мнимой оси. Если же $q_\infty \neq 0$,

то у системы будет единственная точка покоя $Q_\infty = \left(\frac{-q_\infty}{1+q_\infty^2}, \frac{1}{1+q_\infty^2} \right)$, являющаяся фокусом и решение, начинающееся в точке $(0, 0)$ при $q_\infty > 0$, располагается в левой полуплоскости комплексной переменной, наматываясь на точку Q_∞ против часовой стрелки. При $q_\infty \neq 0$ решение целиком располагается выше оси σ_{11} и ниже прямой $\sigma_{12} = D_{12}^0$. Отметим, что скорость изменения напряжений при этом условии не остается знакопостоянной, то есть процесс решения оказывается осциллирующим по скорости напряжений.

4. Рассмотренные авторами другие примеры также показали, что и при переменном q , не удовлетворяющем условиям пункта 3, возникают осциллирующие изменения скоростей напряжений.

Р и с. 2. Изменение σ_{12} от времени: $\tau = \frac{1}{q}$, $k = 1$,
 $l = 0,8$, $2G = 2q(1+\lambda)$, $d\lambda = \sqrt{d\varepsilon : d\varepsilon}$

Пример. Пусть $m = -l^2$, тогда

$$q = \frac{l^2 + 1}{1 - l^2} \frac{1}{1 + \left[\frac{(1 - l^2)}{2l} \cdot \sin \frac{2l}{1 - l^2} t \right]^2}.$$

При $m \rightarrow -1$ значение q велико и практически его величина постоянная, а кривые $\sigma_{12}(t)$ и $\sigma_{11}(t)$ имеют колебательный характер. На рис. 2 приведен типичный пример поведения $\sigma_{12}(t)$ при условии, что $\tau = \frac{1}{q}$, $k = 1$, $l = 0,8$, $2G = 2q(1 + \lambda)$,

$$d\lambda = \sqrt{d\varepsilon : d\varepsilon}.$$

Таким образом, видно, что в зависимости от значения m величина параметра эндохронной неупругости q может иметь различный характер изменения и,

как следствие, могут возникать как монотонные, так и колебательные изменения напряжений.

5. Как известно, например, согласно [12], мера деформации может определяться формулой $\varepsilon^* = D$. Анализ экспериментальных данных показал, что столь простая форма связи ε и D может сужать возможности теории. Поэтому в работе [15] было предложено использовать более общее определение меры деформации

$$\varepsilon^* = K(|D|, \lambda) \cdot D, \quad d\lambda = \sqrt{d\varepsilon : d\varepsilon}.$$

Такое расширение позволило, в частности, описать эффект Рони [16].

Однако существует и другой способ расширения понятия меры деформации, если ввести нелинейность в левую часть уравнения (4). Рассмотрим, например, соотношения (7) в форме

$$\dot{\varepsilon} - i q \varepsilon + (\alpha + \gamma i) \varepsilon^3 = D. \quad (10)$$

Для простейшего случая допустим, что $D_{11} = 0$, $\alpha = 0$, $D \neq 0$, тогда получим

$$\dot{\varepsilon}_{11} = 3\gamma \varepsilon_{12} \varepsilon_{11}^2 - \gamma \varepsilon_{12}^3 - q \varepsilon_{12}, \quad \dot{\varepsilon}_{12} = D_{11} + 3\gamma \varepsilon_{11} \varepsilon_{12}^2 - \gamma \varepsilon_{11}^3 + q \varepsilon_{11}.$$

Авторами данной работы решены следующие задачи.

а. Простой монотонный сдвиг: $D_{12} = 1$ и $q = \frac{1}{1+q^2}$. Оказалось, что при $\gamma = 0$ деформации

ε_{11} и ε_{12} изменяются монотонно, а при $\gamma \neq 0$ все деформационные кривые асимптотически выходят на предельные значения, что и проиллюстрировано на рис. 3.

б. Простой циклический сдвиг, когда $D_{12} = \pm 1$. В этом случае, как видно на рис. 4, при $\gamma = 0$ деформации ε_{11} и ε_{12} имеют периодический симметричный характер развития. Если же $\gamma \neq 0$, то развитие деформаций носит неустановившийся характер и без четких предельных значений (см. рис. 5).

Р и с. 3. Деформационные кривые для ε_{11} и ε_{12}
для задачи а

Р и с. 4. Деформационные кривые для задачи б ($\gamma = 0$)

Р и с. 5. Деформационные кривые для задачи б ($\gamma \neq 0$)

Таким образом, введение кубического члена в соотношения для меры деформации резко меняет вид решения (в зависимости от значения параметра γ), что открывает новые возможности описания реального поведения деформаций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Porteven A., LeChatelier F.* Sur un phenomene observe lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation // *Comp. Rend. Acad. Sci. Paris*, 1923. Vol. 176. P.507–510.
2. *Savart F.* Recherches sur les vibration longitudinales // *Annales de Chimie et de Physique. Deuxieme serie*, 1837. Vol. 65. P. 337–402.
3. *Masson A.* Sur elasticite des corps solides // *Annales de Chimie et de Physique. Troisieme serie*, 1841. Vol. 3. P. 451–462.
4. *Montheillet F., Cohen M., Jonas J. J.* Axial stresses and texture development during the torsion testing of Al, Cu, α -Fe // *Acta Metallurgica*, 1984. Vol. 32. P. 2077–2089.
5. *Poynting J. H.* On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted // *Proceedings of Royal Society. London. A*, 1909. Vol. 82. P. 546–559.
6. *Rubin M. B.* Plasticity theory formulated in terms of physically based microstructural variables. Part II. Examples // *International Journal of Solids and Structures*, 1994. Vol. 31, № 19. P. 2635–2652.
7. *Delobelle P., Robinet P., Bocher L.* Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading on an austenitic steel // *International Journal of Plasticity*, 1995. Vol. 11. № 4. P. 397–421.
8. *Мальшиев Б. М.* Пластическое течение при совместном непрерывном растяжении и кручении под действием малых крутящих моментов // *Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, астрономия, физика, химия*, 1958. № 1. С. 55–68.
9. *Мальшиев Б. М.* Пластическое течение при совместном непрерывном растяжении и кручении под действием малых крутящих моментов // *Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, астрономия, физика, химия*, 1958. № 2. С. 33–46.
10. *Георгиевский Д. В.* Тензорно–нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // *Успехи механики*, 2002. Т. 1, № 2. С. 150–176.
11. *Кадашевич Ю. И., Помяткин С. П.* Новые принципы составления определяющих уравнений эндохронной теории пластичности при конечных деформациях // *Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства: межвузовский сборник научных трудов*. СПб: Издательство Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 1996. С. 124–127.
12. *Кадашевич Ю. И., Помяткин С. П.* Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости // *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. Москва: КМК, 1998. Вып. 59. С. 72–76.
13. *Кадашевич Ю. И., Помяткин С. П.* Новый взгляд на построение эндохронной теории пластичности при учете конечных деформаций // *Научно-технические ведомости СПбГТУ*. СПб:СПбГТУ, 2003. № 3. С. 96–103.
14. *Кадашевич Ю. И., Помяткин С. П.* О расширении возможностей эндохронной теории неупругости, учитывающей конечные деформации // *Проблемы прочности и пластичности*, 2004. Вып. 66. С. 31–34.
15. *Кадашевич Ю. И., Помяткин С. П.* Исследование поведения циклически нестабильных материалов при учете конечных деформаций // *Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела*. Тез. докл. VI международ. научн. симп. Тверь, 1–3 марта 2006. Тверь: Изд-во Твер. гос. техн. ун-та. С. 27–28.
16. *Ronay M.* On second-order strain accumulation in aluminum in reversed cyclic torsion at elevated temperatures // *International Journal of Solids and Structures*, 1967. Vol. 3. P. 167–176.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00169).

Поступила 14.10.2006 г.

УДК 539.374

А. Н. Анисимов, А. И. Хромов

ВНЕДРЕНИЕ КЛИНА В ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПРИ УСЛОВИИ ТЕКУЧЕСТИ КУЛОНА–МОРА

Задача о внедрении клина в полупространство рассматривались Р. Хиллом, Е. Ли и С. Танпером при условиях текучести Мизеса и Треска–Сен-Венана. В этом случае идеальное жесткопластическое тело является несжимаемым. При условии текучести Кулона – Мора происходит изменение объема материала в пластической области. Целью работы являлось исследование полей деформаций в различных точках пластической области: на поверхностях разрыва скоростей перемещений и в центре веера характеристик в условиях плоской деформации.

1. Основные соотношения. Основными соотношениями в теории пластических течений являются [1]:

а) ассоциированный закон пластических течений

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda \geq 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$