Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Анисимов, А. И. Хромов, Внедрение клина в полупространство при условии текучести Кулона–Мора, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 44–49

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:34:26

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Porteven A., LeChatelier F.* Sur un phenomene observe lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation // *Comp. Rend. Acad. Sci. Paris*, 1923. Vol. 176. P. 507–510.
2. *Savart F.* Recherches sur les vibration longitudinales // *Annales de Chimie et de Physique. Deuxieme serie*, 1837. Vol. 65. P. 337–402.
3. *Masson A.* Sur elasticite des corps solides // *Annales de Chimie et de Physique. Troisieme serie*, 1841. Vol. 3. P. 451–462.
4. *Montheillet F., Cohen M., Jonas J. J.* Axial stresses and texture development during the torsion testing of Al, Cu, α -Fe // *Acta Metallurgica*, 1984. Vol. 32. P. 2077–2089.
5. *Poynting J. H.* On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted // *Proceedings of Royal Society. London. A*, 1909. Vol. 82. P. 546–559.
6. *Rubin M. B.* Plasticity theory formulated in terms of physically based microstructural variables. Part II. Examples // *International Journal of Solids and Structures*, 1994. Vol. 31, № 19. P. 2635–2652.
7. *Delobelle P., Robinet P., Bocher L.* Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading on an austenitic steel // *International Journal of Plasticity*, 1995. Vol. 11. № 4. P. 397–421.
8. *Мальшиев Б. М.* Пластическое течение при совместном непрерывном растяжении и кручении под действием малых крутящих моментов // *Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, астрономия, физика, химия*, 1958. № 1. С. 55–68.
9. *Мальшиев Б. М.* Пластическое течение при совместном непрерывном растяжении и кручении под действием малых крутящих моментов // *Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, астрономия, физика, химия*, 1958. № 2. С. 33–46.
10. *Георгиевский Д. В.* Тензорно–нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // *Успехи механики*, 2002. Т. 1, № 2. С. 150–176.
11. *Кадашев Ю. И., Помяткин С. П.* Новые принципы составления определяющих уравнений эндохронной теории пластичности при конечных деформациях // *Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства: межвузовский сборник научных трудов*. СПб: Издательство Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 1996. С. 124–127.
12. *Кадашев Ю. И., Помяткин С. П.* Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости // *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. Москва: КМК, 1998. Вып. 59. С. 72–76.
13. *Кадашев Ю. И., Помяткин С. П.* Новый взгляд на построение эндохронной теории пластичности при учете конечных деформаций // *Научно-технические ведомости СПбГТУ*. СПб: СПбГТУ, 2003. № 3. С. 96–103.
14. *Кадашев Ю. И., Помяткин С. П.* О расширении возможностей эндохронной теории неупругости, учитывающей конечные деформации // *Проблемы прочности и пластичности*, 2004. Вып. 66. С. 31–34.
15. *Кадашев Ю. И., Помяткин С. П.* Исследование поведения циклически нестабильных материалов при учете конечных деформаций // *Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела*. Тез. докл. VI междунар. научн. симп. Тверь, 1–3 марта 2006. Тверь: Изд-во Твер. гос. техн. ун-та. С. 27–28.
16. *Ronay M.* On second-order strain accumulation in aluminum in reversed cyclic torsion at elevated temperatures // *International Journal of Solids and Structures*, 1967. Vol. 3. P. 167–176.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00169).

Поступила 14.10.2006 г.

УДК 539.374

А. Н. Анисимов, А. И. Хромов

ВНЕДРЕНИЕ КЛИНА В ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПРИ УСЛОВИИ ТЕКУЧЕСТИ КУЛОНА–МОРА

Задача о внедрении клина в полупространство рассматривались Р. Хиллом, Е. Ли и С. Таппером при условиях текучести Мизеса и Треска–Сен-Венана. В этом случае идеальное жесткопластическое тело является несжимаемым. При условии текучести Кулона – Мора происходит изменение объема материала в пластической области. Целью работы являлось исследование полей деформаций в различных точках пластической области: на поверхностях разрыва скоростей перемещений и в центре веера характеристик в условиях плоской деформации.

1. Основные соотношения. Основными соотношениями в теории пластических течений являются [1]:

а) ассоциированный закон пластических течений

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda \geq 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\mathbf{d}_{ij}$ — тензор скоростей деформаций; S_{ij} — тензор напряжений; $f(S_{ij})$ — условие текучести; I — постоянная;

б) дифференциальные уравнения равновесия

$$S_{ij,j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

В плоском деформированном состоянии условие текучести Кулона–Мора представляется в виде

$$t = k - \sin \rho \cdot s, \quad (3)$$

где $t = \frac{1}{2} \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2}$, $s = \frac{1}{2}(S_{11} + S_{22})$, а k и ρ — постоянные материала.

Уравнения равновесия (2) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \sin \rho \cos 2\psi) \frac{\partial s}{\partial x} - \sin \rho \sin 2\psi \frac{\partial s}{\partial y} - 2(k - \sin \rho \cdot s) \left(\sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= 0, \\ -\sin \rho \sin 2\psi \frac{\partial s}{\partial x} + (1 + \sin \rho \cos 2\psi) \frac{\partial s}{\partial y} + 2(k - \sin \rho \cdot s) \left(\cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставляя выражения $\mathbf{d}_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\mathbf{d}_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial y}$, $2\mathbf{d}_{12} = \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}$ в соотношения (1), получим уравнения для скоростей:

$$\left. \begin{aligned} 2 \sin 2\psi \frac{\partial V_1}{\partial x} - (\sin \rho + \cos 2\psi) \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) &= 0, \\ 2 \sin 2\psi \frac{\partial V_2}{\partial y} - (\sin \rho - \cos 2\psi) \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Характеристики систем уравнений (4) и (5) образуют два семейства и определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} \eta = \psi - \lambda = \text{const}, \quad \frac{dy}{dx} &= -\frac{dV_1}{dV_2} = \text{tg}(\psi - \varphi), \\ \xi = \psi + \lambda = \text{const}, \quad \frac{dy}{dx} &= -\frac{dV_1}{dV_2} = \text{tg}(\psi + \varphi), \end{aligned}$$

где $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2} \text{ctg} \rho \cdot \ln t$.

2. Определение полей деформаций.

А. Соотношения на поверхности разрыва скоростей перемещения. Будем описывать движение среды в форме Эйлера $x_i^0 = x_i^0(x_1, x_2, x_3)$, где x_i^0 , x_i — лагранжевы и эйлеровы координаты частиц среды соответственно.

Выберем в качестве меры деформации тензор конечных деформаций Альманси

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0). \quad (6)$$

Деформирование материала в окрестности разрыва поля скоростей перемещений рассматривались в работах [2, 3], при этом предполагалось, что материал пластически несжимаемый. Ниже данный подход обобщается на случай сжимаемого пластического тела.

Пусть поверхность Σ является поверхностью разрыва поля скоростей перемещений, которая распространяется с нормальной скоростью G .

Функции $x_i^0 = x_i^0(x_1, x_2, x_3)$, предполагаются непрерывными, производные на поверхности Σ должны удовлетворять, согласно [4], следующим геометрическим и кинематическим условиям совместности:

$$[x_{i,j}^0] = I_i n_j, \quad \left[\frac{\partial x_i^0}{\partial t} \right] = I_i G, \quad (7)$$

где $[x_{i,j}^0] = x_{i,j}^{0+} - x_{i,j}^{0-}$; n_i — компоненты вектора нормали к поверхности Σ ; I_i — некоторые функции, определенные на поверхности разрыва. Индексы «+» и «-» обозначают определенную сторону поверхности Σ .

Вдоль каждой траектории материальной частицы лагранжевы координаты постоянны, поэтому

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \frac{\partial x_j^0}{\partial t} + V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} = 0.$$

Отсюда

$$\left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = - \left[V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} \right],$$

или, учитывая первое соотношение (7), получим

$$\left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = -[V_j] - I_j V_n^+. \quad (8)$$

Представим вектор разрыва скорости перемещений в виде

$$[V_j] = [V_t] t_j + [V_n] n_j,$$

где t_j — компоненты вектора касательной к поверхности разрыва, $[V_t]$ — модуль разрыва касательной компоненты скорости, $[V_n]$ — модуль разрыва нормальной компоненты скорости.

Сравнивая правые части (7) и (8), получим

$$\lambda_i = - \left(\frac{[V_t] t_i}{G + V_n^+} + \frac{[V_n] n_i}{G + V_n^+} \right), \quad [x_{i,j}] = - \left(\frac{[V_t] t_i}{G + V_n^+} + \frac{[V_n] n_i}{G + V_n^+} \right) n_j.$$

Здесь принято, что $G_i = -G n_i$, т.е. вектор G_i направлен против вектора n_i .

Рассмотрим выражение

$$[x_{i,j}] \sigma_{ij} = - \left(\frac{[V_t] t_i n_j \sigma_{ij} dt}{(G + V_n^+) dt} + \frac{[V_n] n_i n_j \sigma_{ij} dt}{(G + V_n^+) dt} \right),$$

где dt — бесконечно малый интервал времени. Здесь первое слагаемое представляет работу касательных к поверхности Σ сил, затраченных на сдвиговые деформации объема $(G + V_n^+) dt$, проходящего через поверхность разрыва. Второе слагаемое — работа нормальных к поверхности Σ сил, затраченных на изменение объема среды.

Введем локальную систему координат, связанную с ортами n_i , t_i . Обозначим

$$W_1 = \frac{[V_t]}{G + V_n^+}, \quad W_2 = \frac{[V_n]}{G + V_n^+}, \quad (9)$$

соответственно, объемные плотности энергии сдвиговых и объемных деформаций.

Тензор градиентов деформаций можно представить в виде

$$[x_{i,j}^0] = \begin{bmatrix} 0 & -W_1 \\ 0 & -W_2 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что ниже поверхности Σ материал недеформирован, т.е. $x_{i,j}^{0-} = d_{ij}$, тогда компоненты тензора конечных деформаций Альманси (6) могут быть представлены в виде

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & W_1 \\ W_1 & 1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2 \end{bmatrix}.$$

Угол q между первым главным направлением тензора Альманси и касательной к поверхности разрыва скоростей, его основные инварианты вычисляются через W_1 и W_2 по формулам:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{2E_{12}}{E_{11} - E_{22}} = \frac{-2W_1}{1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2}, \\ I_E &= \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}) = \frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2), \\ II_E &= (E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2 = \frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2)^2 + W_1^2, \\ E_{1,2} &= \frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}(1 - W_1^2 - (1 - W_2)^2)^2 + W_1^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Б. *Деформации в окрестности центра веера характеристик.* Для исследования поля деформаций в окрестности центра веера характеристик, используется равенство производной Коттер-Ривина по времени от тензора конечных деформаций Альманси и тензора скоростей деформации:

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} V_k + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \mathfrak{E}_{ij}. \quad (11)$$

Рассматривается случай веера характеристик h . Тогда при стремлении к нулю радиуса кривизны R_x характеристики x , система уравнений (11) перейдет всегда в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial \xi} + A \left(e - \frac{1}{2} \right) + B g \cos 2(\theta - \psi) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} + B \left(e - \frac{1}{2} \right) \cos 2(\theta - \psi) + A g &= 0, \\ 2g \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - B \left(e - \frac{1}{2} \right) \sin 2(\theta - \psi) - A \cdot \operatorname{ctg} \rho \cdot g &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Здесь

$$e = \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}), \quad g = \frac{1}{2}\sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}, \quad A = \frac{\bar{u} \cdot \operatorname{tg}(\rho)}{2(\bar{u} - a' \sin(\psi + \varphi) + b' \cos(\psi + \varphi))},$$

$$B = \frac{\bar{u}}{2 \cos \rho (\bar{u} - a' \sin(\psi + \varphi) + b' \cos(\psi + \varphi))},$$

где $\psi = \frac{1}{2}(x + h_0)$ — угол наклона первого главного направления тензора скоростей деформаций к оси x ; $\bar{u}$ — компонента скорости движения частиц вдоль характеристики x , $x = a(t)$, $y = b(t)$ — уравнения движения центра веера характеристик. Величина, описывающая изменение деформации, определяется соотношением $E_1 = e + g$.

3. Задача о внедрении клина в полупространство. Решение задачи о внедрении клина в полупространство (рис. 1) предложено Р. Хиллом [5]. Распределение деформаций на линии разрыва и в окрестности веера характеристик для несжимаемых сред получено в работе [6].

Пластическая область состоит из двух треугольных областей A_0PA_1 и A_2PA_3 с равномерными напряженными состояниями, соединенные центрированным веером A_1PA_2 , состоящего из прямолинейных характеристик h и логарифмических спиралей, параметрические уравнения которых:

$$x = a - \frac{c}{2 \cos \varphi} e^{\operatorname{tg} \rho (\psi - \alpha)} \cos(\psi + \varphi), \quad y = b - \frac{c}{2 \cos \varphi} e^{\operatorname{tg} \rho (\psi - \alpha)} \sin(\psi + \varphi).$$

Здесь a и b координаты точки P .

Построение в плоскости течения xu дают возможность выразить длину контактного участка $A_0P = c$ через глубину вдавливания $OA_0 = h$ следующим образом:

$h = c(\sin \alpha - e^{\operatorname{tg} \rho \theta} \operatorname{tg} \varphi \cos(\alpha + \theta))$,
а также связать углы —
 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$. Давление, необ-

Р и с. 1. К решению задачи о внедрении клина

ходимое для вдавливания клина в полупространство, определяется соотношением

$$P = \frac{k}{\sin \rho} \left(\frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} e^{2 \operatorname{tg} \rho \theta} - 1 \right).$$

Р и с. 3. Решение задачи при $\rho = 10^0$

Наибольшие деформации при $r = 0^\circ$ и $r = 10^\circ$ наблюдаются в окрестности центра веера характеристик.

На рис. 4 представлены графики распределения деформаций $E_1(g)$ в окрестности особенностей поля линий скольжения в зависимости от величины угла раствора клина g для $r = 0^\circ$ (сплошная линия) и $r = 10^\circ$ (пунктирная линия). На линии разрыва поля скоростей перемещений изменение деформаций происходит от значения на линии 1 (A_0A_1) до значения на линии 2 (A_2A_3). В окрестности центра веера характеристик, деформации изменяются от значения на линии 2 до линии 3.

Из графиков следует, что при $r = 0^\circ$, наибольшие деформации наблюдаются в окрестности центра веера характеристик до $\gamma \approx 31,7^\circ$, при $\gamma > 31,7^\circ$ наибольшие деформации наблюдаются на линии разрыва скоростей. При $r = 10^\circ$ до значения $\gamma \approx 38,6^\circ$ наибольшие деформации наблюдаются в центре веера характеристик, при $\gamma > 38,6^\circ$ – на линии разрыва скоростей $A_0A_1A_2A_3$.

Р и с. 4. Распределение деформации

Отметим, что при $r = 10^\circ$ происходит разрыхление материала.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
2. Хромов А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. Владивосток: Дальнаука, 1996. 181 с.
3. Хромов А. И. Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жесткопластических тел // Докл. РАН, 1998. Т. 362, № 2. С. 202–205.
4. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 529 с.
6. Буханько А. А., Хромов А. И. Поля деформаций при внедрении клинообразных и плоских штампов // Дальневост. матем. журн., 2002. Ч. 3, № 2. С. 311–319.

Поступила 7.06.2006 г.