Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Попов, Л. В. Коваленко, Нелинейная стохастическая задача о растяжении полупространства в условиях ползучести, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 56–61

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:58:20

НЕЛИНЕЙНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О РАСТЯЖЕНИИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается краевая задача ползучести о растяжении стохастически неоднородного полупространства. Считается, что плоскость, ограничивающая среду, является свободной от напряжений. Задача решена по методу малого параметра в первом приближении. На основе полученного решения проведен статистический анализ поля напряжений на границе среды, исследованы основные особенности краевого эффекта, возникающего в результате стохастических неоднородностей материала. Показано, что вблизи границы полупространства разброс напряжений значительно больше, чем для глубинных слоев. Полученные результаты позволяют адекватно оценить напряженно-деформированное состояние неоднородной среды вблизи ее границы.

Приближенный метод расчета трехмерного случайного поля напряжений, возникающего в стохастически неоднородной среде, был дан в [1]. Этот метод основывался на ряде допущений, среди которых одним из существенных было допущение о том, что условия на границе среды пренебрежимо мало влияют на напряженно-деформированное состояние в достаточно удаленных от границы точках. Однако это решение нежелательно применять вблизи свободной поверхности, так как они не обладают достаточной точностью. В связи с изложенным необходимо дополнительное изучение влияния стохастических неоднородностей материала вблизи поверхности, на которой заданы детерминированные граничные условия. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести было проведено в работах [2, 3].

В данной работе рассматривается краевая задача о напряженном состоянии стохастически неоднородного полупространства $x_3 \geq 0$, находящегося в условиях ползучести. Причем считается, что поверхность $x_3 = 0$ свободна от напряжений, т.е.

$$\sigma_{i3}|_{x_3=0} = 0 \quad (i=1,2,3). \quad (1)$$

Определяющее соотношение ползучести принимается в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в тензорной форме [1]:

$$\dot{p}_{ij} = cs^{n-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) (1 + \alpha U(x_1, x_2, x_3)), \quad (2)$$

где s – интенсивность напряжений:

$$s^2 = \frac{1}{2} (3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}).$$

Здесь и далее p_{ij} — компоненты тензора деформаций ползучести; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; δ_{ij} — символ Кронекера; α — число, характеризующее степень неоднородности материала ($0 < \alpha < 1$); c, n — постоянные материала. Стохастичность введена в соотношение (2) при помощи случайной однородной функции $U(x_1, x_2, x_3)$, описывающей флуктуации реологических свойств материала. Математическое ожидание $\langle U \rangle$ и дисперсия $\langle U^2 \rangle$ имеют значения 0 и 1 соответственно. Точка означает дифференцирование по времени. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3.

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (3)$$

а компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{p}_{ij}$ — условиям

$$\Lambda_{ijk} \Lambda_{lmn} \dot{p}_{km,ij} = 0, \quad (4)$$

которые получены из уравнений совместности деформаций путем дифференцирования по времени. Здесь Λ_{ijk} — единичный антисимметричный псевдотензор.

Соотношения (2)–(4) при краевых условиях (1) задают стохастическую задачу ползучести, которая в дальнейшем решается приближенно относительно напряжений.

Тензор напряжений σ_{ij} с учетом (1) может быть представлен в виде суммы двух слагаемых

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0, \quad \langle \sigma_{ij}^* \rangle = 0, \quad (5)$$

где σ_{ij}^0 — детерминированная составляющая, а σ_{ij}^* — флуктуации напряжений.

Линеаризация задачи ползучести (2)–(4) была произведена в работе [1]. С целью физической линеаризации функция s^{n-1} была разложена в степенной ряд и в этом разложении были учтены только линейные члены. Для статистической линеаризации определяющего соотношения (2) использовалось корреляционное приближение теории случайных функций, т.е. предполагалось, что произведениями вида $\sigma_{ij}^* \sigma_{kl}^*$, $\alpha U \sigma_{ij}^*$ допустимо пренебречь. В результате система (1)–(4) сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно флуктуаций напряжений σ_{ij}^* :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^* &= 0, \\ \sigma_{ii,12}^* (k_3 l_i - 1) + \alpha U_{,12} l_3 &= 3(\sigma_{13,23}^* + \sigma_{23,13}^* - \sigma_{12,33}^* - \sigma_{33,12}^*), \\ \sigma_{ii,13}^* (k_2 l_i - 1) + \alpha U_{,13} l_2 &= 3(\sigma_{23,12}^* + \sigma_{12,23}^* - \sigma_{13,22}^* - \sigma_{22,13}^*), \\ \sigma_{ii,23}^* (k_1 l_i - 1) + \alpha U_{,22} l_1 &= 3(\sigma_{12,13}^* + \sigma_{13,12}^* - \sigma_{23,11}^* - \sigma_{11,23}^*), \\ \sigma_{ii,11}^* (k_2 l_i - 1) + \sigma_{ii,22}^* (k_1 l_i - 1) + 3(\sigma_{11,22}^* + \sigma_{22,11}^*) + \alpha(U_{,22} l_1 + U_{,11} l_2) &= 6\sigma_{12,12}^*, \\ \sigma_{ii,11}^* (k_3 l_i - 1) + \sigma_{ii,33}^* (k_1 l_i - 1) + 3(\sigma_{11,33}^* + \sigma_{33,11}^*) + \alpha(U_{,33} l_1 + U_{,11} l_3) &= 6\sigma_{13,13}^*, \\ \sigma_{ii,22}^* (k_3 l_i - 1) + \sigma_{ii,33}^* (k_2 l_i - 1) + 3(\sigma_{22,33}^* + \sigma_{33,22}^*) + \alpha(U_{,33} l_2 + U_{,22} l_3) &= 6\sigma_{23,23}^*, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} l_1 &= 3\sigma_{11}^0 - \sigma_{ii}^0, \quad l_2 = 3\sigma_{22}^0 - \sigma_{ii}^0, \quad l_3 = 3\sigma_{33}^0 - \sigma_{ii}^0, \quad k_i = \frac{(n-1)l_i}{2s_0^2}, \\ s_0^2 &= (\sigma_{11}^0)^2 + (\sigma_{22}^0)^2 + (\sigma_{33}^0)^2 - \sigma_{11}^0 \sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0 \sigma_{33}^0 - \sigma_{22}^0 \sigma_{33}^0. \end{aligned}$$

Система (6) состоит из девяти уравнений, но линейно независимыми из них является только шесть первых уравнений.

Краевые условия для системы (6) с учетом (1),(5) имеют вид

$$\sigma_{i3}^* \Big|_{x_3=0} = 0. \quad (7)$$

Пусть однородное случайное поле $U(x_1, x_2, x_3)$, описывающее возмущения механических свойств материала, допускает представление в виде ряда [4]:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} \cos(\omega \beta_s^{(k)} x_s + \varphi^{(k)}), \quad (8)$$

где ω — большой параметр, имеющий размерность, обратную длине; $\beta_s^{(k)}$ — безразмерные величины порядка единицы; $A^{(k)}$ — центрированные случайные величины; $\varphi^{(k)}$ — случайные величины, распределенные равномерно на участке $(0, 2\pi)$, причем все случайные величины $A^{(k)}$, $\varphi^{(k)}$ независимы.

Для удобства выкладок целесообразно перейти к комплексным функциям

$$\tilde{U} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}^{(k)} \exp(i\omega \beta_s^{(k)} x_s), \quad (9)$$

где $\tilde{A}^{(k)} = A^{(k)} \exp(i\varphi^{(k)})$.

Решение системы уравнений (6), (7) можно представить в виде

$$\sigma_{ij}^* = \sum_{k=1}^{\infty} (v_{ij}^{(k)} + w_{ij}^{(k)}), \quad (10)$$

где $v_{ij}^{(k)}$ — частное решение системы (6), полученное при замене функции $\tilde{U}$ k -тым членом разложения (9), а $w_{ij}^{(k)}$ — решение соответствующей (6) однородной системы.

В дальнейшем, где это не приводит к недоразумениям, верхний индекс k будет опускаться.

Функции v_{ij} будем искать в виде

$$v_{ij} = f_{ij} \exp(i\omega\beta_s x_s), \quad f_{ij} = \text{const}. \quad (11)$$

После подстановки (11) в (6) для нахождения f_{ij} получается система алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} f_{11}\beta_1 + f_{12}\beta_2 + f_{13}\beta_3 = 0, \\ f_{12}\beta_1 + f_{22}\beta_2 + f_{23}\beta_3 = 0, \\ f_{13}\beta_1 + f_{23}\beta_2 + f_{33}\beta_3 = 0, \\ f_{ii}\beta_1\beta_2(k_3l_i - 1) + \alpha\tilde{A}\beta_1\beta_2l_3 = 3(f_{13}\beta_2\beta_3 + f_{23}\beta_1\beta_3 - f_{12}\beta_3^2 - f_{33}\beta_1\beta_2), \\ f_{ii}\beta_1\beta_3(k_2l_i - 1) + \alpha\tilde{A}\beta_1\beta_3l_2 = 3(f_{23}\beta_1\beta_2 + f_{12}\beta_2\beta_3 - f_{23}\beta_1^2 - f_{22}\beta_2\beta_3), \\ f_{ii}\beta_2\beta_3(k_1l_i - 1) + \alpha\tilde{A}\beta_2\beta_3l_1 = 3(f_{12}\beta_1\beta_3 + f_{13}\beta_1\beta_2 - f_{23}\beta_1^2 - f_{11}\beta_2\beta_3). \end{cases} \quad (12)$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_{ij}^{(k)}$ задает решение задачи вдали от границы полупространства без учета краевого эффекта.

Функции w_{ij} имеют характер пограничного слоя: они быстро затухают по мере удаления от плоскости $x_3 = 0$. Их можно искать в виде

$$w_{ij} = \varphi_{ij}(x_3) \exp(i\omega(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)), \quad (13)$$

где функции $\varphi_{ij}(x_3)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i\omega\beta_1\varphi_{11} + i\omega\beta_2\varphi_{12} + \varphi_{13,3} = 0, \\ i\omega\beta_1\varphi_{12} + i\omega\beta_2\varphi_{22} + \varphi_{23,3} = 0, \\ i\omega\beta_1\varphi_{13} + i\omega\beta_2\varphi_{23} + \varphi_{33,3} = 0, \\ -\omega^2\beta_1\beta_2[\varphi_{11}(k_3l_1 - 1) + \varphi_{22}(k_3l_2 - 1) + \varphi_{33}(k_3l_3 + 2)] = 3[i\omega\beta_2\varphi_{13,3} + i\omega\beta_1\varphi_{23,3} - \varphi_{12,33}], \\ i\omega\beta_1[\varphi_{11,3}(k_2l_1 - 1) + \varphi_{22,3}(k_2l_2 + 2) + \varphi_{33,3}(k_2l_3 - 1)] = 3[i\omega\beta_2\varphi_{12,3} - \omega^2\beta_1\beta_2\varphi_{23} + \omega^2\beta_2^2\varphi_{13}], \\ i\omega\beta_2[\varphi_{11,3}(k_1l_1 + 2) + \varphi_{22,3}(k_1l_2 - 1) + \varphi_{33,3}(k_1l_3 - 1)] = 3[i\omega\beta_1\varphi_{12,3} - \omega^2\beta_1\beta_2\varphi_{13} + \omega^2\beta_1^2\varphi_{23}]. \end{cases}$$

Эта система получена подстановкой представления (13) в однородную систему, соответствующую (6).

Все дальнейшие выкладки выполнены для случая, когда растяжение полупространства в направлении осей x_1 и x_2 производится равными постоянными напряжениями:

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma^0, \quad \sigma_{33}^0 = 0. \quad (14)$$

Решая систему (12), находим константы f_{ij} :

$$\begin{aligned} f_{i3} &= -\frac{\alpha\sigma^0(\beta_i\beta_3 - \delta_{i3}\beta^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2)}{\Delta} \quad (i=1,2,3), \\ f_{ij} &= -\frac{\alpha\sigma^0(\beta_i\beta_j - \delta_{ij}\beta^2)2\beta_3^2 + \delta_{ij}(\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2)^2}{\Delta} \quad (i,j=1,2), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2, \quad \Delta = n(\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2)^2 + (3+n)\beta_3^2(\beta_1^2 + \beta_2^2).$$

Решение системы для функций $\varphi_{ij}(x_3)$ будем искать в виде

$$\varphi_{ij} = \sum_{s=1}^7 C_s X_{ij}^{(s)} e^{r_s x_3}. \quad (16)$$

Здесь C_s — произвольные постоянные, $X_{ij}^{(s)}$ — координаты собственного вектора, соответствующего корню r_s характеристического уравнения системы для $\varphi_{ij}(x_3)$, которое имеет вид

$$\det B(r) = \begin{vmatrix} i\omega\beta_1 & 0 & 0 & i\omega\beta_2 & r & 0 \\ 0 & i\omega\beta_2 & 0 & i\omega\beta_1 & 0 & r \\ 0 & 0 & r & 0 & i\omega\beta_1 & i\omega\beta_2 \\ \omega^2\beta_1\beta_2Q_{31} & \omega^2\beta_1\beta_2Q_{32} & \omega^2\beta_1\beta_2Q_{33} & -3r^2 & 3i\omega\beta_2r & 3i\omega\beta_1r \\ i\omega\beta_1rQ_{21} & i\omega\beta_1rQ_{22} & i\omega\beta_1rQ_{23} & -3i\omega\beta_2r & -3\omega^2\beta_2^2 & 3\omega^2\beta_1\beta_2 \\ i\omega\beta_2rQ_{11} & i\omega\beta_2rQ_{12} & i\omega\beta_2rQ_{13} & -3i\omega\beta_1r & 3\omega^2\beta_1\beta_2 & -3\omega^2\beta_1^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

где

$$Q_{ij} = 3\delta_{ij} - 1 + k_i l_j.$$

Раскрывая определитель (17), преобразуем характеристическое уравнение к виду:

$$r(r^2 - \omega^2\beta_1^2 - \omega^2\beta_2^2) \left[(3+n)\omega^2(\beta_1^2 + \beta_2^2)r^2 - n(r^2 + \omega^2\beta_1^2 + \omega^2\beta_2^2)^2 \right] = 0.$$

Корни этого уравнения при $n \neq 1$ определяются соотношениями

$$r_1 = 0, \quad r_{2,3} = \pm\omega\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}, \quad r_{4,5} = \pm\omega(a + ib), \quad r_{6,7} = \pm\omega(a - ib), \quad (18)$$

где

$$a = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \frac{\sqrt{3+n}}{2\sqrt{n}}, \quad b = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \frac{\sqrt{3(n-1)}}{2\sqrt{n}}.$$

При $n=1$ корни характеристического уравнения (18) являются кратными и общее решение системы для $\varphi_{ij}(x_3)$ будет иметь другой вид. Этот случай здесь не рассматривается.

Координаты собственных векторов $X_{ij}^{(s)}$ определяются из уравнения $B(r) \cdot X = 0$. Для r_1 они имеют значения:

$$X_{11}^1 = -2\omega^2\beta_2^2, \quad X_{22}^1 = -2\omega^2\beta_1^2, \quad X_{33}^1 = -\omega^2(\beta_1^2 + \beta_2^2), \quad X_{12}^1 = \omega^2\beta_1\beta_2, \quad X_{13}^1 = X_{23}^1 = 0;$$

для r_2, r_3 :

$$X_{11}^s = -X_{22}^s = -2\omega^2\beta_1\beta_2, \quad X_{33}^s = 0, \\ X_{12}^s = -\omega^2(\beta_2^2 - \beta_1^2), \quad X_{13}^s = ir_s\omega\beta_2, \quad X_{23}^s = -ir_s\omega\beta_2 \quad (s=2,3);$$

для $r_4 - r_7$:

$$X_{11}^s = -ir_s^2(\omega^2\beta_2^2 - \omega^2\beta_1^2 - r_s^2), \quad X_{22}^s = -ir_s^2(\omega^2\beta_1^2 - \omega^2\beta_2^2 - r_s^2), \\ X_{33}^s = -i\omega^2(\beta_1^2 + \beta_2^2)(\omega^2\beta_1^2 + \omega^2\beta_2^2 + r_s^2), \quad X_{12}^s = 2ir_s^2\omega^2\beta_1\beta_2, \\ X_{13}^s = r_s\omega\beta_1(\omega^2\beta_1^2 + \omega^2\beta_2^2 + r_s^2), \quad X_{23}^s = r_s\omega\beta_2(\omega^2\beta_1^2 + \omega^2\beta_2^2 + r_s^2) \quad (s=4,7).$$

Таким образом, общее решение системы (6) получается подстановкой (11), (13), (15), (16) и (18) в выражение (10).

Определим теперь неизвестные константы C_s . При быстрой осцилляции случайного поля микронеоднородностей краевой эффект должен быстро затухать по мере удаления от границы полупространства. В силу этого решения (10) при $x_3 \rightarrow \infty$ должно быть ограниченным и совпадать со стационарным, полученным в работе [1]. Корни характеристического уравнения r_2, r_4 и r_6 имеют положительные действительные части и поэтому в силу условия ограниченности решения $C_2 = C_4 = C_6 = 0$. Совпадение полученного решения со стационарным гарантируется условием $C_1 = 0$. Остальные три константы могут быть найдены из краевых условий

$$\Phi_{i3}|_{x_3=0} = -f_{i3}|_{x_3=0},$$

используя которые, получим

$$C_3 = 0, \quad C_5 = \alpha\sigma^0 \frac{(\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2)(\omega\beta_3 + ir_7)}{\Delta\omega^2(\omega^2\beta_1^2 + \omega^2\beta_2^2 + r_5^2)(r_5 - r_7)}, \\ C_7 = \alpha\sigma^0 \frac{(\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2)(\omega\beta_3 + ir_5)}{\Delta\omega^2(\omega^2\beta_1^2 + \omega^2\beta_2^2 + r_7^2)(r_7 - r_5)}. \quad (19)$$

После подстановки найденных констант в (10), решение задачи примет вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^* &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha \sigma^0}{\Delta} \exp\left(i\omega(\beta_1^{(k)} x_1 + \beta_2^{(k)} x_2)\right) \left\{ - \left[2(\beta_3^{(k)})^2 \left((\beta_1^{(k)})^2 - (\beta_2^{(k)})^2 \right) + \right. \right. \\
&+ \left. \left((\beta_1^{(k)})^2 + (\beta_2^{(k)})^2 - (\beta_3^{(k)})^2 \right)^2 \right] \exp(i\omega\beta_3^{(k)} x_3) - \frac{\left((\beta_1^{(k)})^2 + (\beta_2^{(k)})^2 - (\beta_3^{(k)})^2 \right) i}{r_5^{(k)} - r_7^{(k)}} \times \\
&\times \left[\frac{(\omega\beta_3^{(k)} + ir_7^{(k)}) r_5^{(k)2}}{\omega^2 (\omega^2 \beta_1^{(k)2} + \omega^2 \beta_2^{(k)2} + r_5^{(k)2})} (\omega^2 \beta_2^{(k)2} - \omega^2 \beta_1^{(k)2} - r_5^{(k)2}) e^{r_5^{(k)} x_3} - \right. \\
&\left. \left. - \frac{(\omega\beta_3^{(k)} + ir_5^{(k)}) r_7^{(k)2}}{\omega^2 (\omega^2 \beta_1^{(k)2} + \omega^2 \beta_2^{(k)2} + r_7^{(k)2})} (\omega^2 \beta_2^{(k)2} - \omega^2 \beta_1^{(k)2} - r_7^{(k)2}) e^{r_7^{(k)} x_3} \right] \right\}, \\
\sigma_{22}^*(\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}) &= \sigma_{11}^*(\beta_2^{(k)}, \beta_1^{(k)}) \\
\sigma_{33}^* &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha \sigma^0}{\Delta} \left((\beta_1^{(k)})^2 + (\beta_2^{(k)})^2 - (\beta_3^{(k)})^2 \right) e^{i\omega(\beta_1^{(k)} x_1 + \beta_2^{(k)} x_2)} \left\{ - \left((\beta_3^{(k)})^2 - (\beta_1^{(k)})^2 \right) e^{i\omega\beta_3^{(k)} x_3} - \right. \\
&\left. - \frac{\left((\beta_1^{(k)})^2 + (\beta_2^{(k)})^2 \right) i}{r_5^{(k)} - r_7^{(k)}} \left[(\omega\beta_3^{(k)} + ir_7^{(k)}) e^{r_5^{(k)} x_3} - (\omega\beta_3^{(k)} + ir_5^{(k)}) e^{r_7^{(k)} x_3} \right] \right\}, \\
\sigma_{12}^* &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha \sigma^0}{\Delta} e^{i\omega(\beta_1^{(k)} x_1 + \beta_2^{(k)} x_2)} \left\{ -2\beta_1^{(k)} \beta_2^{(k)} \beta_3^{(k)2} e^{i\omega\beta_3^{(k)} x_3} + \frac{2i(\beta_1^{(k)2} + \beta_2^{(k)2} - \beta_3^{(k)2}) \beta_1^{(k)} \beta_2^{(k)}}{r_5^{(k)} - r_7^{(k)}} \times \right. \\
&\times \left[\frac{(\omega\beta_3^{(k)} + ir_7^{(k)}) r_5^{(k)2}}{\omega^2 \beta_1^{(k)2} + \omega^2 \beta_2^{(k)2} + r_5^{(k)2}} e^{r_5^{(k)} x_3} - \frac{(\omega\beta_3^{(k)} + ir_5^{(k)}) r_7^{(k)2}}{\omega^2 \beta_1^{(k)2} + \omega^2 \beta_2^{(k)2} + r_7^{(k)2}} e^{r_7^{(k)} x_3} \right] \Big\} \\
\sigma_{13}^* &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha \sigma^0}{\Delta} (\beta_1^{(k)2} + \beta_2^{(k)2} - \beta_3^{(k)2}) e^{i\omega(\beta_1^{(k)} x_1 + \beta_2^{(k)} x_2)} \left\{ -\beta_1^{(k)} \beta_3^{(k)} e^{i\omega\beta_3^{(k)} x_3} + \right. \\
&\left. - \frac{\omega\beta_1^{(k)}}{r_5^{(k)} - r_7^{(k)}} \left[\frac{(\omega\beta_3^{(k)} + ir_7^{(k)}) r_5^{(k)}}{\omega^2} e^{r_5^{(k)} x_3} - \frac{(\omega\beta_3^{(k)} + ir_5^{(k)}) r_7^{(k)}}{\omega^2} e^{r_7^{(k)} x_3} \right] \right\}, \\
\sigma_{23}^*(\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}) &= \sigma_{13}^*(\beta_2^{(k)}, \beta_1^{(k)}).
\end{aligned} \tag{20}$$

Дальнейшие расчеты произведены при условии, что все величины $\beta_i^{(k)}$ равны единице. При этом условии случайное поле U , заданное разложением (8), можно считать приближенно изотропным [3].

На основе решения краевой задачи (20) были вычислены дисперсии случайного поля напряжений в любой точке полупространства по формуле:

$$D_{ij} = \left\langle |\sigma_{ij}^*|^2 \right\rangle.$$

Они будут являться функциями ωx_3 (ω – частота флуктуаций микронеоднородности). В силу громоздкости выражения для дисперсий здесь не выписаны.

Для оценки напряженного состояния полупространства были вычислены нормированные дисперсии

$$D_{ij}^0 = \frac{D_{ij}(x_3)}{D_{ij}(\infty)}.$$

Графики нормированных дисперсий при различных значениях степени нелинейности материала, представлены на рис. 1 и 2.

Поле напряжений в некотором пограничном слое является статистически неоднородным вдоль оси x_3 , т.е. в направлении, нормальном к границе полупространства. Вне этого слоя поле напряжений является однородным, причем оно совпадает с полем напряжений для неограниченной среды.

Из рис. 1 видно, что при $\omega x_3 \geq 5$ ошибка от замены нормированных дисперсий единицей не превосходит 5%. Поэтому можно считать, что зона пограничного слоя имеет ширину поряд-

ка $4,5/\omega$. С ростом порядка нелинейности материала n зона пограничного слоя увеличивается. Например, как видно из рис. 2, при $n = 7$ она имеет ширину порядка $6/\omega$.

Р и с. 1. Графики нормированных дисперсии при $n = 3$

Р и с. 2. Графики нормированных дисперсии при $n = 7$

Также была посчитана концентрация напряжений σ_{11}^* и σ_{22}^* , возникающая на границе поверхности $x_3 = 0$ в зависимости от степени нелинейности материала. Она вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{\sqrt{D_{11}(0)}}{\sqrt{D_{11}(\infty)}},$$

а ее значения в зависимости от показателя нелинейности установившейся ползучести приведены в таблице

Концентрация напряжений ρ на границе поверхности

n	3	5	7	9
ρ	1,414	1,204	1,121	1,080

Как следует из таблицы, величина ρ изменяется в пределах от 1,08 до 1,41. При этом с увеличением n концентрация напряжений уменьшается. Для сравнения, значение этой величины для упругого полупространства при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,25$ равно 1,05 [5].

Таким образом, в поверхностном слое флуктуации напряжения достигают заметных величин, которые могут быть значительно больше, чем для глубинных слоев. Следовательно, флуктуации напряжения в пограничном слое играют существенную роль при решении вопроса о надежности конструкций. Неучет краевых эффектов может привести к необоснованному завышению оценок работоспособности элементов конструкции, используемых в производстве.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // ПМТФ, 1985. № 2. С. 150–155.
2. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // ПМТФ, 1988. № 1. С. 159–164.
3. Попов Н. Н., Коваленко Л. В. Поле напряжений на границе стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки, 2006. Вып. 42. С. 61–66.
4. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 137с.
5. Подалков В. В., Романов В. А. Концентрация напряжений на границе микрон неоднородного упругого полупространства // ПММ, 1978. Т. 42. Вып.3. С. 540–545.

Поступила 28.08.2006 г.