Общероссийский математический портал

И. П. Завершинский, В. Н. Кнестяпин, Вторичная неустойчивость трехмерного
неравновесного сжимаемого пограничного слоя, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та.
Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 71–78

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и со-
гласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:56:18

Механика жидкости и газа

УДК 532.5

И. П. Завершинский, В. Н. Кнестяпин

ВТОРИЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХМЕРНОГО НЕРАВНОВЕСНОГО СЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Проведено исследование устойчивости нелинейных пространственных волн (вторичной неустойчивости), распространяющихся в сжимаемом неравновесном сверхзвуковом пограничном слое плоской пластины под углом к основному потоку. Найден инкремент развития вторичной неустойчивости течения.

Проблема устойчивости пограничных слоев (ПС) в силу своего большого прикладного значения является одной из центральных в теории газодинамической устойчивости. В равновесных средах эта проблема решалась как для несжимаемых, так и для сжимаемых возмущений [1]. Выделяют следующие этапы перехода к турбулентности в равновесном пограничном слое. При амплитуде начальной турбулентности $\epsilon_1 \leq 0,1\epsilon^*$, где $\epsilon^* \sim (Re\alpha\delta)^{-2/3}$ — пороговая амплитуда возмущения, начиная с которой необходим учет нелинейных членов в критическом слое, выделяют следующие области: ламинарное течение при числах Рейнольдса для пограничного слоя $Re < Re_c$ и волна Толлмина-Шлихтинга, возникающая после потери ПС устойчивости при $Re > Re_c$, где амплитуда возмущения $\epsilon < \epsilon^*$, в которых справедлива линеаризованная теория; область нелинейного критического слоя (НКС) при $\epsilon \geq \epsilon^*$; а при $\epsilon \gg \epsilon^*$ зона первичного стационарного решения и область вторичной неустойчивости (ОВН). Далее возникают пятна Эммонса и, наконец, формируется турбулентное течение.

В неравновесных средах исследования устойчивости пограничных слоев в неравновесных средах актуальны в связи с интенсивными экспериментальными и теоретическими исследованиями, связанными с воздействием плазмы на потоки, обтекающие тело. В [2] показана возможность уширения зоны неустойчивости волн Толлмина-Шлихтинга, возникающих после потери пограничным слоем устойчивости при $Re > Re_c$, при обтекании плоской пластины в аэродинамической трубе под нулевым углом атаки потоком колебательно возбужденного газа. В [3] найден сдвиг Re_c для двумерных возмущений при условиях свободного обтекания пластины потоком колебательно возбужденного газа. Показано, что наличие релаксационных процессов в равновесной среде приводит к увеличению критического числа Рейнольдса, а в неравновесных — к его понижению. В [4] найдены зависимости Re_c для трехмерных возмущений от степени неравновесности S и числа Маха невозмущенного потока M_∞ при различных углах распространения волн. В [5] получено уравнение, описывающее эволюцию возмущения на нелинейной стадии его развития. Показано, что, как и в равновесных средах, рост амплитуды возмущения на данной стадии развития турбулентности носит взрывной характер, а характерное время неустойчивости уменьшается с ростом степени неравновесности. Формирующееся первичная нелинейная волна, в свою очередь, становится неустойчивой по отношению к мелко-масштабным пульсациям — развивается так называемая вторичная неустойчивость пограничного слоя [6, 7], развитие которой ранее проводилось только для несжимаемых равновесных сред. В [6] найдена кривая нейтральной устойчивости для данного типа возмущений на плоской пластине. В [7] проведен численный расчет параметров первичной нелинейной волны и найдены условия возникновения вторичной неустойчивости. В данной работе найдены условия возникновения вторичной неустойчивости неравновесного сжимаемого пограничного слоя на плоской пластине.

1. Первичная нелинейная волна. Исходную систему уравнений релаксационной газодинамики, включающую уравнения непрерывности, Навье-Стокса, состояния газа, переноса тепла и релаксационное уравнение в переменных, обезразмеренных на величины, относящиеся к набегающему потоку (скорость набегающего потока U_∞ , давление P_∞ , плотность ρ_∞ , температу-

ру T_∞): $\rho = \rho/\rho_\infty$, $T = T/T_\infty$, $P = P/P_\infty$, $u = v_{1X}/U_\infty$, $v = v_{1Y}/U_\infty$, $w = v_{1Z}/U_\infty$, $E = E/T_\infty$, $q = Q\delta/U_\infty T_\infty$ представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0, \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \nabla P + \frac{\eta}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}, \quad P = \rho T, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla P + \gamma_\infty P \nabla \mathbf{v} + \frac{\rho}{c_{V\infty}} \frac{E_0 - E}{\tau} &= \frac{\chi T_0}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \Delta T, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla E = \frac{E_0 - E}{\tau} + q. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь использованы координаты $x = x/\delta$, $y = y/\delta$, $z = z/\delta$, обезразмеренные на локальную толщину пограничного слоя δ и время $t = t\delta/U_\infty$. Здесь $\eta = \eta/\eta_\infty$, $\text{Pr} = \eta_\infty/\kappa_\infty$, $\text{Re} = U_\infty \delta/\eta_\infty$, $M_\infty = U_\infty/\alpha_{S\infty}$ — числа Прандтля, Рейнольдса и Маха набегающего потока соответственно, $\mathbf{v} = (u, v, w)$, $\alpha_{S\infty} = (c_{P\infty} T_0 / c_{V\infty} m)^{1/2}$ — замороженная скорость звука, m — масса молекулы, E — колебательная энергия в расчёте на одну молекулу, $E_e = E|_{T_e=T_0}$ — ее равновесное значение,

τ — время колебательной релаксации, Q — мощность внешнего источника накачки в расчете на одну молекулу, необходимая для поддержания условия $E > E_e$, $c_{P\infty}$, $c_{V\infty}$ — замороженные теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно. В используемой релаксационной модели не конкретизируется природа источника накачки. Кроме того, полагается, что можно пренебречь зависимостью мощности источника накачки от температуры и плотности среды.

Р и с.1. Схема пространственного обтекания плоской пластины

Для получения уравнений, описывающих первичную нелинейную волну, будем искать решение системы (1) в виде $u = u_0(y) + u^{(1)}$, $v = v^{(1)}$, $w = w^{(1)}$, $T = T_0(y) + T^{(1)}$, $\rho = \rho_0(y) + \rho^{(1)}$, $P = P_0 + P^{(1)}$, $E = E_0(y) + E^{(1)}$, где возмущения имеют вид бегущей волны, движущейся со скоростью c в направлении, характеризующимся углом θ , определяемым соотношением $\tan \theta = \beta/\alpha$:

$$\rho^{(1)}(x, y, z, t) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \rho_n^{(1)}(y) \exp(in\alpha x + in\beta z - in\alpha c t) \quad (2)$$

и т.д. Перейдем в систему координат, связанной с бегущей волной, направленную под углом θ к основному потоку $\hat{x} = (x - ct)\cos\theta + y\sin\theta$, $\hat{y} = y$, $\hat{z} = -(x - ct)\sin\theta + z\cos\theta$, рис. 1, где компоненты скоростей связаны соотношениями $\hat{u} = u\cos\theta + w\sin\theta$, $\hat{v} = v$, $\hat{w} = -u\sin\theta + w\cos\theta$. Собирая слагаемые при одинаковых Фурье-экспонентах, получим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для мод:

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha_n^2 - \beta^2 \right) \hat{u}_n^{(1)} + i\alpha_n \left(U_0 - \beta \frac{T_0}{M_\infty^2} \frac{b_n}{a_n} \frac{i\alpha_n}{U_0 - \beta} \right) \hat{u}_n^{(1)} - \left((U_0)_y + \frac{T_0}{M_\infty^2} \frac{D_n}{a_n} \frac{1}{U_0 - \beta} \right) \hat{v}_n^{(1)} + \\ + \frac{T_0}{M_\infty^2} \frac{b_n}{a_n} \frac{1}{U_0 - \beta} \frac{d\hat{v}_n^{(1)}}{dy} = \hat{N}_u, \\ \frac{\eta}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha_n^2 - \beta^2 \right) \hat{v}_n^{(1)} + i\alpha_n (U_0 - \beta) \hat{v}_n^{(1)} - \frac{T_0}{M_\infty^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{-\gamma_\infty \frac{b_n}{a_n} \left(i\alpha_n \hat{u}_n^{(1)} + \frac{d\hat{v}_n^{(1)}}{dy} \right) + \frac{D_n}{a_n} \hat{v}_n^{(1)}}{i\alpha_n (U_0 - \beta)} \right) = \hat{N}_v, \quad (3) \\ \frac{\eta}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha_n^2 - \beta^2 \right) \hat{w}_n^{(1)} + i\alpha_n (U_0 - \beta) \hat{w}_n^{(1)} + (U_0)_y \tan\theta \hat{v}_n^{(1)} = \hat{N}_w \end{aligned}$$

с граничными условиями непритопа на стенке $\hat{u}_n^{(1)}(0) = \hat{v}_n^{(1)}(0) = \hat{w}_n^{(1)}(0) = 0$ и затухания возмущений на бесконечности $\hat{u}_n^{(1)}(\infty) = \hat{v}_n^{(1)}(\infty) = \hat{w}_n^{(1)}(\infty) = 0$. Здесь $\alpha_n = n\alpha/\cos\theta$; $U_0 = U_0 \cos\theta$; $\beta = c \cos\theta$, $c_{V0} = c_{V\infty} + c_K + S\tau_T$, $c_{P0} = c_{P\infty} + c_K + S(t_T - \tau_P)$ — низкочастотные теплоемкости при

постоянном объеме и постоянном давлении соответственно; $S = Q\tau/T_0$ — степень неравновесности среды (для колебательно возбужденного газа $S = (E_0 - E_e)/T_0$); $a_n = \frac{c_{V0}}{c_{V\infty}} + i\alpha_n\tau_0(\mathcal{U}_0 - \mathcal{E})$,

$$b_n = \frac{c_{P0}}{c_{P\infty}} + i\alpha_n\tau_0(\mathcal{U}_0 - \mathcal{E}), \quad D_n = \frac{(c_{P0} - c_{P\infty})(T_0)_y - (E_0)_y}{c_{V\infty}(1 + i\mathcal{E}_n\tau_0(\mathcal{U}_0 - \mathcal{E}))} — константы, характеризующие влия-$$

ние процессов релаксации в неравновесной среде на структуру возмущений в ПС (в отсутствие источника накачки в низкочастотном пределе $S = 0$, $\mathcal{E}_{n+\delta}\tau_0 \ll 1$ имеем случай [3] $c_{V0} = c_{V\infty} + c_K$, $a_n = 1$, $b_n = 1$, $D_n = 0$);

$$\hat{N}_u = N_u + \frac{i\mathcal{E}_n}{\gamma_\infty M_\infty^2} \frac{T_0}{a_n} \frac{P_0(c_{P0} - c_{P\infty})N_\rho + N_E + c_{V\infty}(1 + i\mathcal{E}_n\tau_0(\mathcal{U}_0 - \mathcal{E}))N_P}{c_{V\infty}P_0i\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_0 - \mathcal{E})},$$

$$\hat{N}_v = N_v - \frac{T_0}{\gamma_\infty M_\infty^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{a_n} \frac{P_0(c_{P0} - c_{P\infty})N_\rho + N_E + c_{V\infty}(1 + i\mathcal{E}_n\tau_0(\mathcal{U}_0 - \mathcal{E}))N_P}{c_{V\infty}P_0i\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_0 - \mathcal{E})} \right);$$

$\hat{N}_w = N_w$ — нелинейные слагаемые, а функции N_j определяются соотношениями:

$$N_u = \sum_{s=-N_1}^{N_1} \left(i\mathcal{E}_s \hat{u}_{n-s}^{(1)} \hat{u}_s^{(1)} + \hat{v}_{n-s}^{(1)} \frac{d\hat{u}_s^{(1)}}{dy} + i\mathcal{E}_s (\mathcal{U}_0 - \mathcal{E}) \frac{\rho_{n-s}^{(1)} \hat{u}_s^{(1)}}{\rho_0} + (\mathcal{U}_0)_y \frac{\rho_{n-s}^{(1)} \hat{v}_s^{(1)}}{\rho_0} \right),$$

$$N_v = \sum_{s=-N_1}^{N_1} \left(i\mathcal{E}_s \hat{u}_{n-s}^{(1)} \hat{v}_s^{(1)} + \hat{v}_{n-s}^{(1)} \frac{d\hat{v}_s^{(1)}}{dy} + i\mathcal{E}_s (\mathcal{U}_0 - \mathcal{E}) \frac{\rho_{n-s}^{(1)} \hat{v}_s^{(1)}}{\rho_0} \right),$$

$$N_w = \sum_{s=-N_1}^{N_1} \left(i\mathcal{E}_s \hat{u}_{n-s}^{(1)} \hat{w}_s^{(1)} + \hat{v}_{n-s}^{(1)} \frac{d\hat{w}_s^{(1)}}{dy} + i\mathcal{E}_s (\mathcal{U}_0 - \mathcal{E}) \frac{\rho_{n-s}^{(1)} \hat{w}_s^{(1)}}{\rho_0} + (\mathcal{U}_0)_y \operatorname{tg} \theta \frac{\rho_{n-s}^{(1)} \hat{v}_s^{(1)}}{\rho_0} \right),$$

$$N_\rho = \sum_{s=-N_1}^{N_1} \left(i\mathcal{E}_s \frac{\rho_{n-s}^{(1)} \hat{u}_s^{(1)}}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d(\rho_{n-s}^{(1)} \hat{v}_s^{(1)})}{dy} \right),$$

$$N_E = \sum_{s=-N_1}^{N_1} \left(i\mathcal{E}_s \hat{u}_{n-s}^{(1)} E_s^{(1)} + \hat{v}_{n-s}^{(1)} \frac{dE_s^{(1)}}{dy} + \frac{c_K T_{n-s}^{(1)} - E_{n-s}^{(1)}}{\tau_0} \left(\tau_\rho \frac{\rho_s^{(1)}}{\rho_0} + \tau_T \frac{T_s^{(1)}}{T_0} \right) \right) -$$

$$- \sum_{s=-N_1}^{N_1} q \left(\alpha_{TT} \frac{T_{n-s}^{(1)} T_s^{(1)}}{T_0^2} + \alpha_{pT} \frac{T_{n-s}^{(1)} \rho_s^{(1)}}{\rho_0 T_0} + \alpha_{pp} \frac{\rho_{n-s}^{(1)} \rho_s^{(1)}}{\rho_0^2} \right),$$

$$N_P = \sum_{s=-N_1}^{N_1} \left(i\mathcal{E}_s \hat{u}_{n-s}^{(1)} P_s^{(1)} + \hat{v}_{n-s}^{(1)} \frac{dP_s^{(1)}}{dy} - \frac{\rho_0}{c_{V\infty}} \frac{c_K T_{n-s}^{(1)} - E_{n-s}^{(1)}}{\tau_0} \left(\tau_\rho \frac{\rho_s^{(1)}}{\rho_0} + \tau_T \frac{T_s^{(1)}}{T_0} \right) \right) +$$

$$+ \sum_{s=-N_1}^{N_1} \left(q \left(\alpha_{TT} \frac{T_{n-s}^{(1)} T_s^{(1)}}{T_0^2} + \alpha_{pT} \frac{T_{n-s}^{(1)} \rho_s^{(1)}}{\rho_0 T_0} + \alpha_{pp} \frac{\rho_{n-s}^{(1)} \rho_s^{(1)}}{\rho_0^2} \right) + \frac{\rho_{n-s}}{c_{V\infty}} \left(\frac{c_K T_s^{(1)} - E_s^{(1)}}{\tau_0} + q \left(\tau_\rho \frac{\rho_s^{(1)}}{\rho_0} + \tau_T \frac{T_s^{(1)}}{T_0} \right) \right) \right).$$

Система (3) решалась в [6, 9] в несжимаемой равновесной среде при условии $\mathcal{E}_n \operatorname{Re} \gg 1$ методом сращиваемых асимптотических разложений и численно в [7] при любых значениях $\mathcal{E}_n \operatorname{Re}$. В [5] методом сращиваемых асимптотических разложений было получено решение, описывающее начальную стадию развития первичная нелинейная волна в неравновесном газе. Из этого решения и третьего уравнения системы (3) следует оценка скачка профиля скорости $\hat{w}_n^{(1)}$ в так называемом критическом слое:

$$\Delta \hat{w}_n^{(1)} = \frac{\mathcal{U}_0'}{i\mathcal{E}_n(\mathcal{U}_0 - \mathcal{E})} \operatorname{tg} \theta \Delta \hat{v}_n^{(1)} \approx - \frac{\mathcal{U}_C'}{\mathcal{E}_n \mathcal{U}_C'} \frac{W_C''}{W_C'} \Theta \cdot \operatorname{tg} \theta \delta_C,$$

где $\delta_C = (U_C \alpha R)^{-1/3}$ — толщина критического слоя,

$$W_C'' = \left(\frac{\mathcal{U}_C'}{T_C} \right)', \quad W_C' = \frac{\mathcal{U}_C'}{T_C}, \quad \Theta = \frac{64}{3\pi} \Omega_n \frac{U_C''}{(U_C')^2} \frac{W_C'}{W_C''} \left[1 + \frac{T_C'}{16T_C} \frac{U_C'}{U_C''} \right]$$

— скачок фазы решений при переходе через критический слой,

$$\Omega_n = -\frac{3\pi}{64} \sqrt{\frac{\eta_W T_W}{\mathcal{R}_n \text{Re} \mathcal{E}}} \frac{W_C' \sqrt{U_C'^3}}{U_C''} \left(T_W + \frac{M_\infty^2 \mathcal{E}^2 (\gamma_\infty - \Lambda_{nW})}{\sqrt{\text{Pr} b_{nW}}} \right) \left(1 + \frac{T_C' U_C'}{16 T_C U_C''} \right)^{-1},$$

штрих означает дифференцирование по переменной y , индексом «C» обозначается значение функций при $y = y_C$, а индексом «W» — при $y = 0$, $\Lambda_n = a_n/b_n$.

2. Вторичная неустойчивость. Поскольку профиль скорости $\hat{w}_n^{(1)}$ имеет большие градиенты (порядка $\text{tg} \theta \cdot (\mathcal{R}_n \text{Re})^{1/2}$), [1, 6], то следует ожидать, что ПНВ сама неустойчива по отношению к возмущениям с масштабом $\sim \delta / \alpha_{n+\delta} \text{Re}$, то есть порядка толщины критического слоя.

Для исследования устойчивости решений системы (3) будем искать решение системы (1) в виде $\rho(x, y, z, t) = \rho_0(y) + \rho^{(1)}(x, y, z, t) + \rho^{(2)}(x, y, z, t)$ и т.д., где $\rho^{(1)}(x, y, z, t)$ определено в (2).

Линеаризуем систему (1) относительно возмущений $\rho^{(2)}$ и т.д., перейдя в систему координат, связанную с бегущей волной. В этой системе координат решения для ПНВ имеют вид

$$\rho^{(1)}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, t) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} \rho_n^{(1)}(y) \exp(in \mathcal{E} \hat{x} t)$$

и т.д. то есть они периодичны по $\hat{x}$, но не зависят от $\hat{z}$ и t . Последнее утверждение позволяет, следуя [10], для поиска величин $\rho^{(2)}$ и т.д. использовать метод Флоке, представляя соответствующие величины в ОВН в виде

$$\rho^{(2)}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, t) = \exp(i \delta \cdot \mathcal{E} \hat{x} + i b \hat{z}) \sum_{n=-N_2}^{N_2} \rho_n^{(2)}(y) \exp(in \mathcal{E} \hat{x} + \mathcal{E}_n t) \quad (4)$$

и т.д. где, вообще говоря, $N_2 > N_1$, δ — расстройка первичного волнового числа.

Подставим разложения (4) в систему (1) и снова, как и в разделе 1, соберем слагаемые при одинаковых Фурье – экспонентах. Тогда получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для мод:

$$\begin{aligned} & \left[i \mathcal{E}_{n+\delta} ((\mathcal{U}_0' - \mathcal{E}) - \mathcal{E}_n) - i b \mathcal{U}_0' \text{tg} \theta \right] \hat{u}_n^{(2)} + (\mathcal{U}_0')_y \hat{v}_n^{(2)} + i \mathcal{E}_{n+\delta} \frac{T_0}{M_\infty^2} \frac{-\frac{B_n}{A_n} \left(i \mathcal{E}_{n+\delta} \hat{u}_n^{(2)} + \frac{d \hat{v}_n^{(2)}}{dy} + i b w_n^{(2)} \right) + \frac{D}{\gamma_\infty A_n} \hat{v}_n^{(2)}}{i \mathcal{E}_{n+\delta} ((\mathcal{U}_0' - \mathcal{E}) - \mathcal{E}_n) - i b \mathcal{U}_0' \text{tg} \theta} = \\ & = \frac{\eta}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - (\mathcal{E}_{n+\delta}^2 + b^2) \right) \hat{u}_n^{(2)} + \varepsilon N_u, \\ & \left[i \mathcal{E}_{n+\delta} (\mathcal{U}_0' - \mathcal{E}) - i b \mathcal{U}_0' \text{tg} \theta + \mathcal{E}_n \right] \hat{v}_n^{(2)} + \frac{T_0}{M_\infty^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{-\frac{B_n}{A_n} \left(i \mathcal{E}_{n+\delta} \hat{u}_n^{(2)} + \frac{d \hat{v}_n^{(2)}}{dy} + i b w_n^{(2)} \right) + \frac{D}{\gamma_\infty A_n} \hat{v}_n^{(2)}}{i \mathcal{E}_{n+\delta} (\mathcal{U}_0' - \mathcal{E}) - i b \mathcal{U}_0' \text{tg} \theta + \mathcal{E}_n} \right) = \\ & = \frac{\eta}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - (\mathcal{E}_{n+\delta}^2 + b^2) \right) \hat{v}_n^{(2)} + \varepsilon N_v, \\ & \left[i \mathcal{E}_{n+\delta} (\mathcal{U}_0' - \mathcal{E}) - i b \mathcal{U}_0' \text{tg} \theta + \mathcal{E}_n \right] \hat{w}_n^{(2)} + (\mathcal{U}_0')_y \text{tg} \theta \hat{v}_n^{(2)} + i b \frac{T_0}{M_\infty^2} \frac{-\frac{B_n}{A_n} \left(i \mathcal{E}_{n+\delta} \hat{u}_n^{(2)} + \frac{d \hat{v}_n^{(2)}}{dy} + i b w_n^{(2)} \right) + \frac{D}{\gamma_\infty A_n} \hat{v}_n^{(2)}}{i \mathcal{E}_{n+\delta} (\mathcal{U}_0' - \mathcal{E}) - i b \mathcal{U}_0' \text{tg} \theta + \mathcal{E}_n} = \\ & = \frac{\eta}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - (\mathcal{E}_{n+\delta}^2 + b^2) \right) \hat{w}_n^{(2)} + \varepsilon N_w \end{aligned} \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\hat{u}_n^{(2)}(0) = \hat{v}_n^{(2)}(0) = \hat{w}_n^{(2)}(0) = 0, \quad \hat{u}_n^{(2)}(\infty) = \hat{v}_n^{(2)}(\infty) = \hat{w}_n^{(2)}(\infty) = 0, \quad (6)$$

где выражения для N_j имеют структуру

$$N_J = - \sum_{n=-N_2}^{N_2} \left(K_{J;n-s}^{(1)} \hat{u}_s^{(2)} + \Lambda_{J;n-s}^{(1)} \hat{v}_s^{(2)} + M_{J;n-s}^{(1)} \hat{w}_s^{(2)} + N_{J;n-s}^{(1)} \frac{d\hat{u}_s^{(2)}}{dy} + O_{J;n-s}^{(1)} \frac{d\hat{v}_s^{(2)}}{dy} + P_{J;n-s}^{(1)} \frac{d\hat{w}_s^{(2)}}{dy} \right),$$

а коэффициенты $K_{J;n-s}^{(1)}$ и т.д. есть функции решений для первичной нелинейной волны,

$$A_n = \frac{c_{V0}}{c_{V\infty}} + \left[i\alpha_{n+\delta} (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n) + \mathcal{B}_n - ib\mathcal{U}_0 \operatorname{tg}\theta \right] \tau_0, \quad B_n = \frac{c_{P0}}{c_{P\infty}} + \frac{c_{V0}}{c_{V\infty}} + \left[i\alpha_{n+\delta} (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n) + \mathcal{B}_n - ib\mathcal{U}_0 \operatorname{tg}\theta \right] \tau_0.$$

В двухмерном случае ($\theta = 0$) система уравнений (5), (6) с точностью до вида величин A_n и B_n совпадает с системой для нерелаксирующего равновесного газа [7], где $\tau_0 = 0$, $S = 0$ и $A_n = B_n = 1$.

Аналогичные по форме уравнения получены в [3, 4] при анализе устойчивости двух- и трехмерных волн Толлмина–Шлихтинга в неравновесном газе. Поэтому для получения аналитических решений системы (5), (6) может быть использован тот же метод, впервые предложенный в [8].

Если $\mathcal{B}_{n+\delta} \operatorname{Re} \gg 1$, то согласно [3, 4, 8] фундаментальная система решений системы (5) может быть составлена из так называемых невязких решений $\{u, v, w\} = \{\Psi, \Phi, W\}$ и линейно независимых вязких решений $\{u, v, w\} = \{f_3, \Phi_3, W_3\}$, а также и вязких тепловых решений, которыми согласно [8] при небольших сверхзвуковых скоростях можно пренебречь. Здесь используются общепринятые в теории устойчивости течений обозначения.

Уравнения для определения невязких решений следуют из системы (5) и имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{B}_{n+\delta}^2 (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)}{T_0} \hat{v}_n^{(2)} - \frac{d}{dy} \left[\frac{(\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n) \frac{d\hat{v}_n^{(2)}}{dy} - (\mathcal{U}_0)_y \left(1 + \frac{b^2}{\mathcal{B}_{n+\delta}^2} \right) \hat{v}_n^{(2)} - (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n) \frac{\Delta_n}{\gamma_\infty B_n} \hat{v}_n^{(2)}}{T_0 \left(1 + \frac{b^2}{\mathcal{B}_{n+\delta}^2} \right) - M_\infty^2 \frac{A_n}{B_n} (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)^2} \right] &= \varepsilon N_v, \\ \hat{u}_n^{(2)} - \frac{i}{\mathcal{B}_{n+\delta}} \frac{T_0 \frac{d\hat{v}_n^{(2)}}{dy} - \left[(\mathcal{U}_0)_y (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n) M_\infty^2 \frac{A_n}{B_n} + \frac{T_0 \Delta_n}{\gamma_\infty B_n} \right] \hat{v}_n^{(2)}}{T_0 \left(1 + \frac{b^2}{\mathcal{B}_{n+\delta}^2} \right) - M_\infty^2 \frac{A_n}{B_n} (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)^2} &= \varepsilon N_u, \\ \hat{w}_n^{(2)} - \frac{b}{\mathcal{B}_{n+\delta}} \hat{u}_n^{(2)} - \frac{(\mathcal{U}_0)_y}{i\mathcal{B}_{n+\delta} (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)} \left(\frac{b}{\mathcal{B}_{n+\delta}} + \operatorname{tg}\theta \right) \hat{v}_n^{(2)} &= \varepsilon N_w, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_0 + \frac{i\mathcal{B}_n + b\mathcal{U}_0 \operatorname{tg}\theta}{\mathcal{B}_{n+\delta}}$, $\Delta_n = D - \gamma_\infty B_n \frac{b}{\mathcal{B}_{n+\delta}} \frac{(\mathcal{U}_0)_y}{\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n} \left(\frac{b}{\mathcal{B}_{n+\delta}} + \operatorname{tg}\theta \right)$.

Систему (7) при $\varepsilon \ll 1$ будем решать методом Линшtedта–Пуанкаре. Пренебрегая в исходном приближении слагаемыми в правой части, получаем общее решение первого уравнения системы (7) в виде $\Phi_n^{(0)} = G_{1n} \Phi_{1n}^{(0)}(y) + G_{2n} \Phi_{2n}^{(0)}(y)$, где

$$\Phi_{1n}^{(0)} = (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n) \Xi_n(y) \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n+\delta}^{2m} H_{2m}(y), \quad \Phi_{2n}^{(0)} = (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n) \Xi_n(y) \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n+\delta}^{2m} K_{2m+1}(y).$$

В этих рядах величины Ξ_n , H_m , K_m определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \Xi_n(y) &= \exp \int_0^y \frac{\Delta_n}{B_n \gamma_\infty} d\xi, \quad H_0 = 1, \quad H_1 = \int_0^y \frac{(\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)^2}{T_0} \Xi_n(\xi) d\xi, \\ H_2 &= \int_0^y \left[\frac{T_0}{(\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)^2} - M_\infty^2 \frac{A_n}{B_n} \right] \frac{H_1}{\Xi_n(\xi)} d\xi, \quad H_3 = \int_0^y \frac{(\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)^2}{T_0} \Xi_n(\xi) H_2 d\xi, \\ K_1 &= \int_0^y \left[\frac{T_0}{(\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)^2} - M_\infty^2 \frac{A_n}{B_n} \right] \frac{d\xi}{\Xi_n(\xi)}, \quad K_2 = \int_0^y \frac{(\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)^2}{T_0} \Xi_n(\xi) K_1 d\xi, \\ K_3 &= \int_0^y \left[\frac{T_0}{(\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)^2} - M_\infty^2 \frac{A_n}{B_n} \right] \frac{K_2}{\Xi_n(\xi)} d\xi, \dots \end{aligned}$$

Величины H_m , K_m отличаются от соответствующих величин в нерелаксирующем газе наличием коэффициентов A_n , B_n и функции $\Xi_n(y)$.

В следующем по ϵ порядке теории возмущений первое уравнение системы (7) можно переписать в виде

$$\frac{\mathcal{C}_{n+\delta}^2(\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)}{T_0} \Phi_n^{(1)} - \frac{d}{dy} \left[\frac{(\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n) \frac{d\Phi^{(1)}}{dy} - (\mathcal{U}_0)_y \left(1 + \frac{b^2}{\mathcal{C}_{n+\delta}^2}\right) \Phi^{(1)} - (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n) \frac{\Delta_n}{\gamma_\infty B_n} \Phi^{(1)}}{T_0 \left(1 + \frac{b^2}{\mathcal{C}_{n+\delta}^2}\right) - M_\infty^2 \frac{A_n}{B_n} (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)^2} \right] = \epsilon N_v(\Phi^{(0)}, \Psi^{(0)}, W^{(0)}).$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$\delta\Phi_n(y) = \epsilon \left[\varphi_{2n}^{(0)}(y) \int_0^y \frac{\varphi_{1n}^{(0)}(\xi) h_n(\xi)}{V_n^{(0)}(\xi)} d\xi - \varphi_{1n}^{(0)}(y) \int_0^y \frac{\varphi_{2n}^{(0)}(\xi) h_n(\xi)}{V_n^{(0)}(\xi)} d\xi \right], \quad (8)$$

где

$$h_n(\xi) = - \frac{T_0 \left(1 + \frac{b^2}{\mathcal{C}_{n+\delta}^2}\right) - M_\infty^2 \frac{A_n}{B_n} (\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n)^2}{\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n} N_v, \quad V_n^{(0)} = \varphi_{1n}^{(0)} \frac{d\varphi_{2n}^{(0)}}{dy} - \varphi_{2n}^{(0)} \frac{d\varphi_{1n}^{(0)}}{dy},$$

а общее решение первого уравнения системы (7) с точностью до слагаемых порядка ϵ^1 запишется так:

$$\Phi_n(y) = G_{1n} \varphi_{1n}^{(0)}(y) + G_{2n} [\varphi_{2n}^{(0)}(y) + \delta\Phi_n(y)]. \quad (9)$$

Для поиска вязких решения системы (6) введем переменную $\varsigma = \left(\frac{3}{2} \int_{y_c}^y \sqrt{\frac{\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n}{\eta}} d\xi \right)^{2/3} \times (\mathcal{C}_{n+\delta} \text{Re})^{1/3}$, где значение y_c определяется условием $U_0 = c$. В нулевом порядке по параметру $(\mathcal{C}_{n+\delta} \text{Re})^{-1/3}$ первые два уравнения системы (8) сводятся к виду

$$i \frac{d^4 \varphi_{3n}^{(0)}}{d\varsigma^4} + \varsigma \frac{d^2 \varphi_{3n}^{(0)}}{d\varsigma^2} = 0, \quad \mathcal{C}_{n+\delta} f_{3n}^{(0)} = i \sqrt{\frac{\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n}{\eta}} \left(\frac{3}{2} \int_{y_c}^y \sqrt{\frac{\mathcal{U}_0 - \mathcal{C}_n}{\eta}} dy_1 \right)^{-1/3} \frac{d\varphi_{3n}^{(0)}}{d\varsigma}. \quad (10)$$

Решение первого уравнения системы (10), убывающее на бесконечности, приведено в [8] и записывается соотношением

$$\varphi_{3n}^{(0)} = \int_{-\infty}^{\varsigma} d\varsigma \int_{-\infty}^{\varsigma} \sqrt{\varsigma} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\varsigma)^{3/2} \right] d\varsigma, \quad (11)$$

где $H_{1/3}^{(1)}$ — функция Ханкеля порядка 1/3.

Вязкие и невязкие решения связаны друг с другом. Эта связь следует из граничных условий на поверхности пластины и для моды с номером n сводится к виду [8]

$$\frac{\Phi_n(0)}{\Psi_n(0)} = \frac{\varphi_{3n}(0)}{f_{3n}(0)}. \quad (12)$$

С одной стороны, из (10), (11) следует при $y = 0$ условие

$$\frac{\varphi_{3n}(0)}{f_{3n}(0)} = iF(z) \frac{(\lambda + 1) \mathcal{C}_n}{\mathcal{U}_W}, \quad (13)$$

где $F(z)$ — функция Титьенса,

$$\lambda = \frac{3\eta^{1/2} \mathcal{U}_W^{1/2}}{2\mathcal{C}_n^{1/2}} \int_0^{y_c} \sqrt{\frac{\mathcal{C}_n - \mathcal{U}_0}{\eta}} d\xi - 1, \quad z = -\varsigma(y=0) = \left(\frac{3}{2} \int_0^{y_c} \sqrt{\frac{\mathcal{C}_n - \mathcal{U}_0}{\eta}} d\xi \right)^{2/3} (\mathcal{C}_{n+\delta} \text{Re})^{1/3}.$$

С другой стороны, из второго уравнения системы (7), (8) и (9) следует

$$\frac{\Psi_n(0)}{\Phi_n(0)} = \frac{i}{\mathcal{C}_{n+\delta}} \left[T_W \frac{\Phi_{nW}'}{\Phi_{nW}} + \mathcal{C}_n M_\infty^2 \frac{A_{nW}}{B_{nW}} - T_0(0) M_\infty^2 \frac{D_{nW}}{B_{nW}} - \epsilon N_{uW} \right] \left[T_W \left(1 + \frac{b^2}{\mathcal{C}_{n+\delta}^2}\right) - M_\infty^2 \frac{A_{nW}}{B_{nW}} \right]^{-1}, \quad (14)$$

где из (9) получаем отношение Φ_{nW}'/Φ_{nW} :

$$\frac{\left. \frac{d\Phi_n^{(0)}}{dy} \right|_{y=1}}{\Phi_n(1)} = \left[\frac{\left. \frac{d\varphi_{1n}^{(0)}}{dy} \right|_{y=1}}{G_{1n}} + \frac{G_{2n}}{G_{1n}} \left(\frac{\left. \frac{d\varphi_{2n}^{(0)}}{dy} \right|_{y=1}}{G_{1n}} + \frac{\left. \frac{d\delta\Phi_n}{dy} \right|_{y=1}}{G_{1n}} \right) \right] \left[\varphi_{1n}^{(0)} + \frac{G_{2n}}{G_{1n}} (\varphi_{2n}^{(0)}(0) + \delta\Phi_n(0)) \right]^{-1}. \quad (15)$$

Получим отношение G_{2n}/G_{1n} . Для возмущений, распространяющихся относительно внешнего потока с дозвуковой фазовой скоростью в предположении однородности набегающего потока, должно выполняться на границе пограничного слоя условие [8]

$$\left. \frac{d\Phi_n}{dy} \right|_{y=1} + \vartheta_n \Phi_n(1) = 0,$$

где $\vartheta_n = \mathfrak{G}_{n+\delta} \sqrt{1 - \mathfrak{M}_\infty^2 \frac{A_n(\infty)}{B_n(\infty)} (1 - \mathcal{C}_n^0)^2}$, $\mathfrak{M} = M_\infty \cos \theta$. Тогда из (15) следует

$$\frac{G_{2n}}{G_{1n}} = - \left[\frac{\left. \frac{d\varphi_{1n}^{(0)}}{dy} \right|_{y=1}}{G_{1n}} + \vartheta_n \varphi_{1n}^{(0)}(1) \right] \left[\frac{\left. \frac{d\varphi_{2n}^{(0)}}{dy} \right|_{y=1}}{G_{1n}} + \frac{\left. \frac{d\delta\Phi_n}{dy} \right|_{y=1}}{G_{1n}} + \vartheta_n (\varphi_{2n}^{(0)}(1) + \delta\Phi_n(1)) \right]^{-1}.$$

Подставляя (15) в (14) с учетом этих выражений, в пределе ($\mathfrak{G}_{n+\delta} \ll 1$) получаем соотношение для определения собственных значений:

$$\frac{1}{(\lambda + 1)F(z)} = 1 + \frac{T_0(0)}{\mathfrak{G}_{n+\delta} \mathcal{C}_n^0 (\mathcal{U}_0^0)_y(0)} \frac{\left. \frac{d\varphi_{1n}^{(0)}}{dy} \right|_{y=1} + \vartheta_n \varphi_{1n}^{(0)}(1)}{\frac{\left. \frac{d\varphi_{2n}^{(0)}}{dy} \right|_{y=1} + \frac{\left. \frac{d\delta\Phi_n}{dy} \right|_{y=1}}{G_{1n}} + \vartheta_n (\varphi_{2n}^{(0)}(1) + \delta\Phi_n(1))} - \varepsilon \frac{\mathcal{C}_n^0 N_u(0)}{\mathfrak{G}_{n+\delta} (\mathcal{U}_0^0)_y(0)}. \quad (16)$$

Полагая $\lambda = \lambda^{(0)} + \delta\lambda$, $\mathcal{C}_n^0 = \mathcal{C}_n^{(0)} + \delta\mathcal{C}_n^0$, $\lambda = \lambda(\mathcal{C}_n^0)$ и замечая, что $\lambda^{(0)}$ определяется уравнением

$$\frac{1}{(\lambda^{(0)} + 1)F(z)} = 1 + \frac{T_0(0)}{\mathfrak{G}_{n+\delta} \mathcal{C}_n^{(0)} (\mathcal{U}_0^0)_y(0)} \left[\frac{\left. \frac{d\varphi_{1n}^{(0)}}{dy} \right|_{y=1} + \vartheta_n \varphi_{1n}^{(0)}(1) \right] \left[\frac{\left. \frac{d\varphi_{2n}^{(0)}}{dy} \right|_{y=1} + \vartheta_n \varphi_{2n}^{(0)}(1) \right]^{-1},$$

решение которого известно [3, 8], для величины $\mathfrak{G}_n$ в соответствии с методом Линштедта-Пуанкаре получаем соотношение

$$\mathfrak{G}_n = \delta\mathcal{C}_n^0 = \frac{T_0(0)}{\mathfrak{G}_{n+\delta} (\mathcal{U}_0^0)_y(0)} \frac{\frac{\left. \frac{d\delta\Phi_n}{dy} \right|_{y=1} + \vartheta_n \delta\Phi_n(1)}{\left. \frac{d\varphi_{1n}^{(0)}}{dy} \right|_{y=1} + \vartheta_n \varphi_{1n}^{(0)}(1)} + \mathcal{C}_n^{(0)} N_u(0)}{F[z(\mathcal{C}_n^{(0)})] - \frac{3}{2} + \frac{\frac{\mathcal{C}_n^{(0)}}{2} \int_0^{y_c} (\mathcal{C}_n^{(0)} \mathcal{U}_0^0)^{-1/2} d\xi - \frac{2}{3} \frac{\mathcal{C}_n^{(0)3/2}}{(\mathcal{U}_0^0)_y(0)}}{\int_0^{y_c} (\mathcal{C}_n^{(0)} - \mathcal{U}_0^0)^{1/2} d\xi}}. \quad (17)$$

Выше указывалось, что скорость $\hat{w}^{(1)}$ терпит скачок порядка $(\alpha_{n+\delta} \text{Re})^{-1/2}$, что и приводит к высокочастотной вторичной неустойчивости волны. Поэтому для оценки величины инкремента вторичной неустойчивости в слагаемых $\sim \delta\Phi_n$ достаточно сохранить члены пропорциональные $d\hat{w}_n^{(1)}/dy$. Выделяя мнимую часть выражения при $b \sim 1$ [7], $\alpha_{n+\delta} \ll 1$, получим выражение для инкремента вторичной неустойчивости $\Gamma_n = \mathfrak{G}_{n+\delta} \Re[\mathfrak{G}_n]$:

$$\Gamma_n \approx \frac{T_W}{\mathcal{C}_n^{(0)} \mathcal{U}_W^0 \Xi_n(1)} \times \frac{\int_0^1 \left[\left(\frac{\Delta_n}{B_n \gamma_\infty} + \vartheta_n \right) K_1(1) + T_W - \frac{M_\infty^2 A_n}{\Xi_n(1) B_n} - K_1(\xi) \left(1 + \frac{\Delta_n}{B_n \gamma_\infty} \right) \right] \frac{\Xi_n(\xi) (\mathcal{U}_0^0(\xi) - \mathcal{C}_n^0)}{V_n^{(0)}(\xi)} d\xi}{\left(F[z(\mathcal{C}_n^{(0)})] - \frac{3}{2} \right) \left(1 + \frac{\Delta_n}{B_n \gamma_\infty} \right)}. \quad (18)$$

В низкочастотном пределе $\mathcal{C}_{n+\delta}\tau_0 \ll 1$ коэффициенты $A_n = c_{V0}/c_{V\infty}$, $B_n = c_{P0}/c_{P\infty}$ и D_n действительны, а выражение для действительной части функции $h_n(\xi)$ принимает вид

$$\Re[h_n(\xi)] \approx - \frac{T_0 \left(1 + \frac{b^2}{\mathcal{C}_{n+\delta}^2}\right) - M_\infty^2 \frac{A_n}{B_n} (\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_n)^2}{M_\infty^2 (\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_n)^3} \frac{T_0 b^2}{\gamma_\infty} \sum_{s=-N_2}^{N_2} \frac{B_s^2}{A_s^2} \left(1 + \frac{b^2}{\mathcal{C}_{s+\delta}^2}\right) d\hat{w}_{n-s}^{(1)}.$$

Р и с. 2. Зависимость инкремента неустойчивости наиболее неустойчивой в зависимости от степени неравновесности S и амплитуды z -й проекции скорости течения $\hat{w}^{(1)}$

Величина инкремента определяется амплитудой z -компоненты ПВН $\hat{w}^{(1)}$ и степенью неравновесности S . Зависимость инкремента от S и $\hat{w}^{(1)}$ при $\mathcal{C}_{n+\delta} = 0,1$ приведена на рис. 2. Приведенные зависимости инкремента от $\hat{w}^{(1)}$ и n качественно совпадают с полученными в [6, 7] для равновесной несжимаемой среды. Угол θ соответствует углу распространения наиболее опасных первичных возмущений малой амплитуды, и, как показано в [4], слабо падает с ростом степени неравновесности, причем $\theta(S=0) \approx 56^\circ$, [6, 11].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1987. 282 с.
2. Bertolotti F. P. The influence of rotational and vibrational energy relaxation on boundary-layer stability // Journal of fluid mechanics, 1998. Vol. 372. P. 93–118.
3. Молевич Н. Е. Асимптотический анализ устойчивости плоскопараллельного пограничного слоя сжимаемого релаксирующего газа // Известия РАН. МЖГ, 1999. № 5. С. 82–87.
4. Завершинский И. П., Кнестяпин В. Н. Устойчивость трехмерных возмущений малой амплитуды в неравновесном сжимаемом пограничном слое // ТВТ, 2007. Т. 45, № 2. С. 1–8.
5. Завершинский И. П., Коган Е. Я., Кнестяпин В. Н. Нелинейный критический слой в неравновесном газе // ТВТ, 2007. Т. 45, № 4. С. 243–247.
6. Жигулев В. Н., Киркинский А. И., Сидоренко Н. В., Тумин А. М. К вопросу о механизме вторичной неустойчивости и его роли в процессе возникновения турбулентности // Аэромеханика. Сб. науч. тр. М.: Наука, 1976. С. 118–140.
7. Koch W., Bertolotti F. P., Stolte A., Hein S. Nonlinear equilibrium solutions in a three-dimensional boundary layer and their secondary instability // Journal of fluid mechanics, 2000. No. 406. P. 131–174.
8. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958. 196 с.
9. Benney D. J., Bergeron R. F. A new class of nonlinear waves in parallel flows // Stud. Appl. Math., 1969. Vol. 48, No. 2. P. 181–193.
10. Herbert T. Secondary instability of boundary layers // Am. Rev. Fluid Mech., 1988. Vol. 20. P. 487–526.
11. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 07-01-96608) и аналитической целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы» (2006 – 2008 гг.).

Поступила 25.09.2006 г.