Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Попов, Вязкое разрушение стохастически неоднородной сферической оболочки, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998, выпуск 6, 35–39

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu5>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:27:11

ВЯЗКОЕ РАЗРУШЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрена задача об определении времени до разрушения толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления. Стохастические неоднородности материала описываются при помощи случайной функции одной переменной. Определяющее соотношение ползучести выбрано в виде нелинейной теории вязкого течения. Получены формулы для вычисления математического ожидания и дисперсии времени до разрушения.

В соответствии с моделью вязкого разрушения предполагается, что под действием постоянного давления в результате ползучести изменяется геометрия оболочки. Вследствие этого напряжение и скорость деформаций ползучести растут, и в какой-то момент времени наступает разрушение. В силу стохастической неоднородности материала время до разрушения будет случайной величиной.

В начальный момент времени $t=0$ внутренний и наружный радиусы сферы соответственно равны a_0, b_0 , а в произвольный момент времени t - соответственно $a(t)$ и $b(t)$. Будем предполагать, что материал оболочки несжимаем, мгновенными деформациями допустимо пренебречь, а деформации ползучести описываются уравнениями теории вязкого течения, которые в сферических координатах имеют вид [1]

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_r &= -\frac{2}{3}c(\sigma_\varphi - \sigma_r)^n [1 + \alpha U(r)], \\ \dot{\varepsilon}_\varphi &= \dot{\varepsilon}_\psi = \frac{1}{3}c(\sigma_\varphi - \sigma_r)^n [1 + \alpha U(r)].\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\psi$ - компоненты тензора деформаций; σ_φ, σ_r - компоненты тензора напряжений; $U(r)$ - случайная функция, описывающая флуктуации механических свойств материала, статистические характеристики которой считаются известными, в частности $\langle U \rangle = 0, \langle U^2 \rangle = 1$; α - число, играющее роль коэффициента вариации механических свойств; c, n - постоянные материала.

К определяющим соотношениям (1) необходимо присоединить уравнения равновесия

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} - 2(\sigma_\varphi - \sigma_r) = 0, \quad (2)$$

условия совместности деформаций

$$r \frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{dr} + \dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{\varepsilon}_r = 0 \quad (3)$$

и граничные условия

$$\sigma_r(a(t)) = -q, \quad \sigma_r(b(t)) = 0, \quad (4)$$

где q - внутреннее давление.

Решение системы стохастических дифференциальных уравнений ползучести (1)-(4) приведены в [1]. В частности, там получено

$$\sigma_r = A \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^{\frac{3}{n}} \right] + \frac{3\alpha Ab}{n^2} \left[\frac{1 - \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{3}{n}}}{1 - \left(\frac{b}{r} \right)^{\frac{3}{n}}} I(b) - I(r) \right], \quad (5)$$

где

$$A = \frac{qa^{\frac{3}{n}}}{b^{\frac{3}{n}} - a^{\frac{3}{n}}}, \quad I(r) = \int_a^r U(x) x^{-1-\frac{3}{n}} dx.$$

Для определения времени до разрушения оболочки введем соотношение

$$\beta(t) = \frac{b(t)}{a(t)}. \quad (6)$$

Следуя работе [2], будем считать, что в процессе ползучести материала оболочки под действием внутреннего давления это соотношение стремится к единице и время вязкого разрушения соответствует условию $\beta = 1$. Поэтому сначала составим стохастическое дифференциальное уравнение относительно β .

Заметим, что в произвольной точке r скорость деформации в окружном направлении может быть представлена в виде [2]

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi}(a) = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt}.$$

Для точек, расположенных на наружной и внутренней поверхностях оболочки, имеем

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi}(a) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi}(b) = \frac{1}{b} \frac{db}{dt}. \quad (7)$$

Если продифференцировать отношение (6) по времени, то с учетом выражений (7) можно получить

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta [\dot{\varepsilon}_{\varphi}(b) - \dot{\varepsilon}_{\varphi}(a)]. \quad (8)$$

Используя вытекающее из (2) соотношение

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_r = \frac{r}{2} \sigma_r'$$

и формулу (5), второе определяющее соотношение (1) можно представить в виде

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi} = C_1 A^n \left(\frac{b}{r} \right)^3 \left[1 + \frac{\alpha H}{n} - \frac{\alpha U}{n} \right]^n (1 + \alpha U), \quad (9)$$

где

$$C_1 = \frac{3^{n-1} c^n}{2^n n^n}, \quad H = \frac{3a^{\frac{3}{n}} I(b)}{n \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{3}{n}} \right]}.$$

Разлагая выражение

$$\left[1 + \frac{\alpha H}{n} - \frac{\alpha U}{n} \right]^n$$

в формуле (9) в ряд Тейлора по α и ограничиваясь членами первого порядка малости относительно α , получим

$$\dot{\varepsilon}_\varphi(r) = C_1 A^n \left(\frac{b}{r}\right)^3 [1 + \alpha H - \alpha U + o(\alpha)](1 + \alpha U) = C_1 A^n \left(\frac{b}{r}\right)^3 (1 + \alpha H) + o(\alpha).$$

Подставляя это выражение в уравнение (8), имеем

$$\frac{d\beta}{dt} = -C_1 q^n \frac{\beta(\beta^3 - 1)}{(\beta^{\frac{3}{n}} - 1)^n} \left[1 + \frac{3\alpha b^{\frac{3}{n}}}{n(\beta^{\frac{3}{n}} - 1)} \int_a^b U(x) x^{-1-\frac{3}{n}} dx \right]. \quad (10)$$

Уравнение с помощью замены переменной в интеграле $z = x/a$ можно представить в виде

$$\frac{d\beta}{dt} = -C_1 q^n \frac{\beta(\beta^3 - 1)}{(\beta^{\frac{3}{n}} - 1)^n} \left[1 + \frac{3\alpha b^{\frac{3}{n}}}{n(\beta^{\frac{3}{n}} - 1)} \int_1^\beta U(az) z^{-1-\frac{3}{n}} dz \right]. \quad (11)$$

Переменную a , входящую в уравнение (11), можно выразить через переменную β , используя условие несжимаемости материала.

$$a = a_0 \sqrt[3]{\frac{\beta_0^3 - 1}{\beta^3 - 1}},$$

где $\beta_0 = b_0/a_0$ - начальное значение параметра β .

Теперь уравнение (8) можно записать в виде

$$f(\beta) d\beta = -C_1 q^n dt,$$

где

$$f(\beta) = \frac{(\beta^{\frac{3}{n}} - 1)^n}{\beta(\beta^3 - 1) \left[1 + \frac{3\alpha b^{\frac{3}{n}}}{n(\beta^{\frac{3}{n}} - 1)} \int_1^\beta U(az) z^{-1-\frac{3}{n}} dz \right]}.$$

Интегрируя последнее уравнение при начальном условии $\beta|_{t=0} = \beta_0$, получим

$$\int_{\beta_0}^\beta f(\beta) d\beta = -C_1 q^n t. \quad (12)$$

Так как предполагается, что в момент разрушения параметр β равен 1, то из формулы (12) при $\beta=1$ получим время до разрушения оболочки

$$t_p = \frac{1}{C_1 q^n} \int_1^{\beta_0} f(\beta) d\beta.$$

Учитывая, что $|\alpha U|$ значительно меньше 1, линеаризуем $f(\beta)$:

$$f(\beta) = \frac{(\beta^{\frac{3}{n}} - 1)^n}{\beta(\beta^3 - 1)} \left[1 - \frac{3\alpha\beta^{\frac{3}{n}}}{n(\beta^{\frac{3}{n}} - 1)} \int_1^\beta U(az) z^{-1-\frac{3}{n}} dz \right]. \quad (13)$$

Экспериментальные данные подтверждают, что случайную величину $U(r)$, описывающую стохастические свойства материала, можно считать распределенной по нормальному закону [3,4]. Случайная величина t_p , которая является приближенно линейной относительно U , также будет являться нормально распределенной.

Среднее значение случайной величины t_p

$$\langle t_p \rangle = \frac{1}{C_1 q^n} \int_1^{\beta_0} \frac{(\beta^{\frac{3}{n}} - 1)^n}{\beta(\beta^3 - 1)} d\beta$$

совпадает с временем до разрушения, вычисленным в [2] без учета стохастических неоднородностей.

Дисперсия случайного времени до разрушения с учетом формулы (13)

$$D[t_p] = \frac{9\alpha^2}{C_1^2 n^2} \int_1^{\beta_0} \frac{(\beta^{\frac{3}{n}} - 1)^{2n-2} \beta^{2(\frac{3}{n}-1)}}{(\beta^3 - 1)^2} d\beta \int_1^\beta \int_1^\beta K_U[a(z_1 - z_2)] z_1^{-1-\frac{3}{n}} z_2^{-1-\frac{3}{n}} dz_1 dz_2, \quad (14)$$

где $K_U(z_1, z_2)$ - корреляционная функция случайной функции $U(az)$.

В связи с тем, что дисперсия (14) определяется достаточно громоздким выражением и требует знания корреляционной функции микрон неоднородностей, при оценке долговечности можно ориентироваться на верхнюю границу $D[t_p]$, которую легко получить. Для этого сначала оценим сверху внутренний двухкратный интеграл, входящий в (14):

$$\begin{aligned} & \int_1^\beta \int_1^\beta K_U[a(z_1 - z_2)] z_1^{-1-\frac{3}{n}} z_2^{-1-\frac{3}{n}} dz_1 dz_2 \leq \\ & \leq \int_1^\beta \int_1^\beta |K_U[a(z_1 - z_2)]| z_1^{-1-\frac{3}{n}} z_2^{-1-\frac{3}{n}} dz_1 dz_2 \leq \\ & \leq \int_1^\beta \int_1^\beta z_1^{-1-\frac{3}{n}} z_2^{-1-\frac{3}{n}} dz_1 dz_2 = \frac{n^2}{9} \frac{(\beta^{\frac{3}{n}} - 1)^2}{\beta^{\frac{6}{n}}}. \end{aligned} \quad (15)$$

При выводе неравенства (15) использовано свойство корреляционной функции [5]

$$|K_U(z_1 - z_2)| \leq D_U = 1.$$

С учетом формулы(15) верхняя граница дисперсии случайного времени до разрушения(14) имеет вид

$$D[t_p] \leq \frac{\alpha^2}{C_1^2} \int_1^{\beta_0} \frac{(\beta^{3/n} - 1)^{2n}}{\beta^2 (\beta^3 - 1)^2} \cdot$$

Теперь можно вычислить вероятность безотказной работы оболочки по критерию длительной прочности. Она равна вероятности того, что на заданном отрезке времени $[0, t]$ разрушения оболочки не происходит:

$$P(t) = P(t > t_p) = 0.5 - \Phi \left(\frac{t - \langle t_p \rangle}{\sqrt{D[t_p]}} \right),$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа,

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Если при этом использовать вместо величины $D(t_p)$ ее верхнюю границу, то формула (16) будет давать оценку снизу для вероятности безотказной работы.

Полученные результаты позволяют более обоснованно подойти к прогнозированию ресурса сферической оболочки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попов Н.Н. Длительная прочность стохастически неоднородной сферической оболочки // Надежность и прочность машиностроительных конструкций: Сб.науч.тр. Куйбышев: КПТИ, 1988. С.55-60.
2. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
3. Broberg H., Westlung R. Creep in structures with random material properties // Int.J. Solids and Structures. 1978. Vol.14. P.364-374.
4. Broberg H., Westlung R. Creep scatter as an inherent material property // Arch. mech. Stocow. 1979. Vol. 31, N 2. P. 165-176.
5. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 464 с.