Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Зайцев, А. В. Кислицын, Об одном решении задачи Ламе для составного протяженного элемента конструкции, состоящего из посаженных с натягом толстостенного трансверсально-изотропного внешнего цилиндра на соосный изотропный внутренний, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 164–167

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:09:28

ну $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$. Найденные величины u и $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$ определяют коэффициент f системы уравнений (3) при заданном векторе $m = a'i + b'j$.

Р и с. 4.

На этом этапе возможны два варианта пластического течения [4]: 1) при максимально возможных деформациях материала; 2) при допустимых деформациях материала, определяемых характеристикой E_* .

Данный подход реализует алгоритм, предложенный в работе [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 529 с.
2. Хромов А. И. Деформации и разрушения жесткопластических тел. Владивосток: Дальнаука, 1996. 160 с.
3. Хромов А. И., Козлова О. В. Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения. Владивосток: Дальнаука, 2005. 158 с.
4. Хромов А. И., Буханько А. А., Степанов С. Л. Концентраторы деформаций // ДАН, 2006. Т. 407. № 6. С. 777–781.

Поступила 5.07.2006 г.

УДК 539.3

А. В. Зайцев, А. В. Кислицын

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ЛАМЕ ДЛЯ СОСТАВНОГО ПРОТЯЖЕННОГО ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ ПОСАЖЕННЫХ С НАТЯГОМ ТОЛСТОСТЕННОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ВНЕШНЕГО ЦИЛИНДРА НА СООСНЫЙ ИЗОТРОПНЫЙ ВНУТРЕННИЙ

Получено новое точное аналитическое решение задачи Ламе о равновесии толстостенного составного элемента конструкции, состоящего из посаженных с натягом трансверсально-изотропного внешнего цилиндра на соосный изотропный внутренний.

Рассмотрим находящийся под действием внутреннего p_a и внешнего p_b равномерных давлений в условиях плоско-деформированного состояния бесконечно длинный полый составной элемент конструкции, состоящий из двух соосных однородных и линейно упругих толстостенных цилиндрических тел. Будем считать, что до запрессовки поперечное сечение внутреннего изотропного цилиндра ограничено двумя концентрическими окружностями радиусами a и c ($a < c$), а трансверсально-изотропного наружного цилиндра — радиусами $c - \delta$ и b ($c - \delta < b$). В результате соосной посадки точки, принадлежащие внешней поверхности внут-

ренного цилиндра и внутренней поверхности внешнего цилиндра, получают радиальные перемещения, алгебраическая сумма которых составляет величину натяга $\delta \geq 0$. При построении решения будем предполагать, что граница раздела двух тел, составляющих элемент конструкции, известна и располагается на расстоянии c от оси вращения.

Определяющие соотношения в цилиндрических ортогональных координатах r , θ и z (ось z совпадает с образующими цилиндрических тел) представим следующим образом:

$$\sigma_{rr}^{(\gamma)} = K_{11}^{(\gamma)} \varepsilon_{rr}^{(\gamma)} + K_{12}^{(\gamma)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(\gamma)}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(\gamma)} = K_{12}^{(\gamma)} \varepsilon_{rr}^{(\gamma)} + K_{22}^{(\gamma)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(\gamma)}, \quad \sigma_{zz}^{(\gamma)} = K_{13}^{(\gamma)} \varepsilon_{rr}^{(\gamma)} + K_{23}^{(\gamma)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(\gamma)}, \quad (1)$$

по γ — не суммировать. Все константы и функции, которые относятся к внутреннему и внешнему цилиндрам, в дальнейшем будем обозначать стоящими в верхней позиции в круглых скобках индексами 1 и 2 соответственно.

Коэффициенты $K_{ij}^{(\gamma)}$, которые содержатся в уравнениях (1), запишем с использованием деформационных характеристик материалов:

$$K_{11}^{(1)} = K_{22}^{(1)} = E^{(1)} [D^{(1)}]^{-1} [1 - \nu^{(1)}], \quad K_{12}^{(1)} = K_{13}^{(1)} = K_{23}^{(1)} = E^{(1)} \nu^{(1)} [D^{(1)}]^{-1}, \quad (2)$$

$$K_{11}^{(2)} = K_{22}^{(2)} = E^{(2)} [D^{(2)}]^{-1} \left(1 - [\hat{\nu}^{(2)}]^2 \right), \quad K_{12}^{(2)} = E^{(2)} [D^{(2)}]^{-1} \left(\nu^{(2)} - [\hat{\nu}^{(2)}]^2 \right), \quad (3)$$

$$K_{13}^{(2)} = K_{23}^{(2)} = E^{(2)} [D^{(2)}]^{-1} [1 + \nu^{(2)}] \hat{\nu}^{(2)}, \quad K_{33}^{(2)} = E^{(2)} [D^{(2)}]^{-1} \left(1 - [\nu^{(2)}]^2 \right),$$

$$D^{(1)} = [1 + \nu^{(1)}] [1 - 2\nu^{(1)}], \quad D^{(2)} = (1 + \nu^{(2)}) \left(1 - \nu^{(2)} - 2 [\hat{\nu}^{(2)}]^2 \right).$$

Здесь $E^{(\gamma)}$ и $\hat{E}^{(\gamma)}$ — модули Юнга в плоскости изотропии $r\theta$ и направлении z (для внешнего трансверсально-изотропного цилиндра), а $\nu^{(\gamma)}$ и $\hat{\nu}^{(\gamma)}$ — коэффициенты Пуассона. Очевидно, что коэффициенты (2) могут быть получены из (3) при подстановке $(\hat{E}^{(2)} = E^{(2)} = E^{(1)})$ и $(\hat{\nu}^{(2)} = \nu^{(2)} = \nu^{(1)})$.

Напряжения $\sigma_{ij}^{(\gamma)}$, деформации $\varepsilon_{ij}^{(\gamma)}$ и перемещения $u_r^{(\gamma)}$ точек составного цилиндрического тела являются функциями только радиальной координаты r , удовлетворяют уравнениям равновесия в отсутствии массовых сил и геометрическим соотношениям Коши

$$r d\sigma_{rr}^{(\gamma)} / dr + \sigma_{rr}^{(\gamma)} - \sigma_{\theta\theta}^{(\gamma)} = 0, \quad \varepsilon_{rr}^{(\gamma)} = du_r^{(\gamma)} / dr, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(\gamma)} = u_r^{(\gamma)} / r, \quad (4)$$

а также условиям непрерывности перемещений и радиальных напряжений на поверхности контакта:

$$u_r^{(2)} \Big|_{r=c} - u_r^{(1)} \Big|_{r=c} = \delta/2, \quad \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=c} = \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=c}. \quad (5)$$

Интегрируя обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно перемещений $u_r^{(\gamma)}$, которые получаются в результате последовательной подстановки определяющих (1) и геометрических соотношений (второе и третье равенства (4)) в уравнения равновесия (первое равенство (4)), и учитывая условия на границе контакта (5), можно записать их общие решения. Граничные условия

$$\sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=a} = -p_a, \quad \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=b} = -p_b,$$

заданные на внутренней и внешней поверхности составного цилиндрического тела, позволяют определить постоянные интегрирования общих решений и получить аналитические зависимости компонент тензора напряжений в направлении радиальной координаты r .

Напряжения в точках поперечного сечения бесконечно длинного составного линейно упругого цилиндрического тела, отстоящих от оси вращения на расстояние r , будут определяться соотношениями:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \frac{1}{r^2 A_1} \left[p_c c^2 (r^2 - a^2) + p_a a^2 (c^2 - r^2) \right], \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{r^2 A_1} \left[p_c c^2 (r^2 + a^2) - p_a a^2 (c^2 + r^2) \right],$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = A_1^{-1} \left[2v^{(1)} (p_c c^2 - p_a a^2) \right], \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2)} &= E^{(2)} H_1 \left(\left[\hat{v}^{(2)} \right]^2 + v^{(2)} \right) + H_2 H_5, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{E^{(2)}}{\hat{E}^{(2)}} H_1 H_4 + H_2 E^{(2)} \left(\left[\hat{v}^{(2)} \right]^2 + v^{(2)} \right), \\ \sigma_{zz}^{(2)} &= \hat{v}^{(2)} H_1 \left[\hat{E}^{(2)} + E^{(2)} v^{(2)} \right] + v^{(2)} H_2 \left[E^{(2)} + \hat{E}^{(2)} v^{(2)} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

которые содержат следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} A_1 &= a^2 - c^2, \quad H_1 = \frac{A_2}{A_3} \left(r^{n-1} \frac{B_2}{F_3} + b^n c^n \frac{B_1}{r^{n+1} F_2} \right), \quad H_2 = n \frac{A_2}{A_3} \left(r^{n-1} \frac{B_2}{F_3} - b^n c^n \frac{B_1}{r^{n+1} F_2} \right), \\ H_3 &= E^{(2)} \hat{E}^{(2)} (c^{2n} - b^{2n}), \quad H_4 = \hat{E}^{(2)} - E^{(2)} \left[\hat{v}^{(2)} \right], \quad H_5 = E^{(2)} - \hat{E}^{(2)} \left[\hat{v}^{(2)} \right]^2, \\ A_2 &= E^{(2)} \left\{ \left[E^{(2)} \right]^2 \left[\hat{v}^{(2)} \right]^2 + E^{(2)} \hat{E}^{(2)} \left(\left[v^{(2)} \right]^2 - 1 \right) + \hat{E}^{(2)} \left[\hat{v}^{(2)} \right]^2 \left[\hat{E}^{(2)} + 2E^{(2)} v^{(2)} \right] \right\}, \quad (8) \\ B_1 &= bc (p_b c^{n-1} - p_c b^{n-1}), \quad B_2 = p_c c^{1+n} - p_b b^{1+n}, \quad A_3 = 1 - \left[\hat{v}^{(2)} \right]^2 \left(\frac{\hat{E}^{(2)}}{E^{(2)}} - \frac{E^{(2)}}{\hat{E}^{(2)}} - 2v^{(2)} - 1 \right), \\ F_2 &= H_3 E^{(2)} \left(B_3 + \left[E^{(2)} \right]^2 v^{(2)} \right), \quad B_3 = \hat{E}^{(2)} \left[\hat{v}^{(2)} \right]^2 n + E^{(2)} \left(\left[\hat{v}^{(2)} \right]^2 - n \right), \\ F_3 &= H_3 E^{(2)} \left(B_4 + \left[E^{(2)} \right]^2 v^{(2)} \right), \quad B_4 = E^{(2)} \left(\left[\hat{v}^{(2)} \right]^2 + n \right) - \hat{E}^{(2)} \left[\hat{v}^{(2)} \right]^2 n. \end{aligned}$$

Здесь $n = \sqrt{\left[E^{(2)} H_4 \right] / \left[\hat{E}^{(2)} H_5 \right]}$ — показатель анизотропии.

Радиальное давление на поверхности контакта

$$p_c = \frac{\delta}{2c} \left(\frac{H_3}{A_4 (J_1 + J_2)} + \frac{E^{(1)} (a^2 - c^2)}{\left\{ a^2 + c^2 \left[1 - 2v^{(1)} \right] \right\} \left[1 + v^{(1)} \right]} \right) \quad (9)$$

полностью определяется деформационными постоянными материалов

$$\begin{aligned} A_4 &= \left(\left[\hat{E}^{(2)} \right]^2 + \left[E^{(2)} \right]^2 \right) \left[\hat{v}^{(2)} \right]^2 + \hat{E}^{(2)} E^{(2)} \left\{ v^{(2)} \left(2 \left[\hat{v}^{(2)} \right]^2 + v^{(2)} \right) - 1 \right\}, \\ J_1 &= \frac{c^{2n}}{E^{(2)} v^{(2)} + B_4}, \quad J_2 = \frac{b^{2n}}{E^{(2)} v^{(2)} - B_3} \end{aligned}$$

и не зависит от величин внутреннего и внешнего давлений.

Проанализировав полученные соотношения (6) и (7), можно сделать вывод о том, что компонента $\sigma_{zz}^{(1)}$ не зависит от радиальной координаты и сохраняет постоянное значение вдоль образующей внутреннего цилиндра. Обратим также внимание на то, что при известном из (9) радиальном давлении на поверхности контакта p_c распределение напряжений в поперечных сечениях составных элементов конструкций (6) и (7) может быть также получено из решения одной из задач Ламе по определению напряженного состояния: первая — внутреннего изотропного цилиндра, находящегося под действием равномерных внешнего p_c и внутреннего p_a давлений, вторая — наружного трансверсально-изотропного цилиндра, нагруженного равномерным внешним p_b и внутренним p_c давлениями. Кроме того, в частном случае, когда внешнее цилиндрическое тело изотропно ($\hat{E}^{(2)} = E^{(2)}$ и $\hat{v}^{(2)} = v^{(2)}$) и изготовлено из того же материала, что и внутренний цилиндр ($E^{(1)} = E^{(2)}$ и $v^{(1)} = v^{(2)}$), составной протяженный элемент конструкции можно рассматривать как однородный толстостенный цилиндр с дополнительными напряжениями p_c , заданными на расстоянии c от оси вращения. Если еще и $\delta = 0$, то на

поверхности контакта при $r = c$ будут выполняться условия непрерывности для всех компонент тензора напряжений (вместе со своими производными до k -го порядка включительно), а, следовательно, соотношения (6) и (7) будут соответствовать решению задачи Ламе для однородного толстостенного изотропного цилиндра, находящегося под действием распределенных внешнего p_b и внутреннего p_a давления [2]. Необходимо отметить, что при $\delta = 0$ подстановки $c = b$ и $c = a$ в уравнения (6)–(7) и коэффициенты (8) позволяют получить точные аналитические решения задач Ламе для толстостенных изотропного [2] и трансверсально-изотропного цилиндров [1, 3] соответственно с заданными в первом случае — на внешней, во втором — на внутренней боковых поверхностях равномерных давлений p_c .

На рисунке показано сравнение распределений компонент тензора напряжений в поперечных сечениях составных протяженных элементах конструкций ($a = 0,230$ м, $c = 0,256$ м и $b = 0,288$ м), которые находятся под действием внутреннего $p_a = 4,5$ МПа и внешнего $p_b = 1,0$ МПа равномерных давлений при $\delta = 1,05 \cdot 10^{-5}$ м, для различных значений показателя анизотропии материала внешнего цилиндра. Во всех рассматриваемых примерах предполагалось, что внутренний цилиндр изготовлен из стали ($E^{(1)} = 2,8 \cdot 10^5$ МПа и $\nu^{(1)} = 0,3$), а внешний — из стеклопластика ($E^{(2)} = 5,68 \cdot 10^5$ и $\nu^{(2)} = 0,06$, $\hat{E}^{(2)} = 1,57 \cdot 10^5$ и $\hat{\nu}^{(2)} = 0,38$).

Результаты, представленные на рисунке, свидетельствуют о существенном влиянии показателя анизотропии материала внешнего цилиндра n на напряженное состояние составных элементов конструкций. Как видим, с увеличением n наблюдается качественное и количественное изменение характера распределения напряжений: более однородное распределение радиальных компонент; значительное снижение величины скачка на границе контакта цилиндров для окружных и увеличение — для осевых компонент.

Влияние степени анизотропии на характер распределения напряжений в точках поперечных сечений составного цилиндра

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Термопрочность деталей машин / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, И.В. Демьянушко и др. М.: Машиностроение, 1975. 455 с.
2. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высш. школа, 1975. 526 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал № 07–01–96056) и по гранту Президента РФ (МК–3903.2005.8) для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук.

Поступила 30.08.2006 г.