Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Абрамов, Исследование устойчивости решения уравнений движения малых тел солнечной системы при использовании метода Адамса–Мултона, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 171–174

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 11:52:05

В. В. Абрамов

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА АДАМСА–МУЛТОНА

С помощью метода Адамса–Мултона проведено исследование эволюции орбит малых тел Солнечной системы, имеющих несколько тесных сближений на выбранном интервале времени. Выполнено исследование устойчивости численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. Полученные результаты указывают на сходимость решения.

В настоящее время для решения задач небесной механики применяются различные численные методы с высоким порядком аппроксимации. Одним из наиболее точных в данной области считается модифицированный метод Эверхарта [1], который является неявным одношаговым методом. Его эффективность на длительных интервалах интегрирования была подтверждена путём сопоставления результатов вычислений координат и скоростей небесных тел с базой данных DE 405 [2], которая, в свою очередь, согласована с радиолокационными наблюдениями. Недостатком метода Эверхарта является невысокая скорость вычислений, несмотря на достаточно большой шаг интегрирования.

При решении данной задачи также широко используются многошаговые методы, наиболее перспективными из которых являются методы Адамса. При этом предпочтение следует отдавать неявному методу Адамса–Мултона, который является более точным, чем явный метод Адамса–Бэшфорта. При использовании неявного метода необходимо решать нелинейное уравнение, например, с помощью итерационного процесса [3]:

$$\begin{aligned}
 P: \quad y_{n+1}^{(0)} &= y_n + h \sum_{i=0}^k B_i f(x_{n-i}, y_{n-i}), \\
 E: \quad f_{n+1}^{(1)} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}), \\
 C: \quad y_{n+1}^{(1)} &= y_n + h M_0 f_{n+1}^{(1)} + h \sum_{i=1}^k M_i f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i}^{(1)}), \\
 &\quad \mathbf{M} \\
 E: \quad f_{n+1}^{(n)} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(n-1)}), \\
 C: \quad y_{n+1}^{(n)} &= y_n + h M_0 f_{n+1}^{(n)} + h \sum_{i=1}^k M_i f(x_{n+1-i}, y_{n+1-i}^{(n)}) = y_{n+1}, \\
 E: \quad f_{n+1} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}). \quad (1)
 \end{aligned}$$

Процесс вычислений (1) называется методом прогноза и коррекции $P(EC)^n E$. Запись P означает применение предсказывающей формулы метода Адамса–Бэшфорта, E — вычисление правой части f дифференциального уравнения, C — применение исправляющей формулы метода Адамса–Мултона, n — количество итераций, B_i и M_i — коэффициенты метода Адамса–Бэшфорта и метода Адамса–Мултона соответственно. Таким образом, сначала производится вычисление начального приближения $y_{n+1}^{(0)}$ по формуле метода Адамса–Бэшфорта, которое затем используется в вычислении правой части дифференциального уравнения — функции f , входящей в формулу метода Адамса–Мултона. Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет достигнута сходимость, либо фиксированное число раз.

В качестве математической модели, описывающей движение небесных тел, были взяты дифференциальные уравнения движения в барицентрической системе координат, с учётом ньютоновских и шварцшильдовских членов [4], обусловленных их взаимным влиянием:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (r_j - r_i)}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(b+g)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{r_{ik}} - \frac{2b-1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{m_k}{r_{jk}} + g \frac{u_i^2}{c^2} + (1+g) \frac{u_j^2}{c^2} - \right. \\
 \left. - \frac{2(1+g)}{c^2} \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_{ij}} - \frac{3}{2c^2} \left[\frac{(r_i - r_j) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (r_j - r_i) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j \right\} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} \left\{ [(r_i - r_j)] \times [(2 + 2g)\mathbf{r}_i - (1 + 2g)\mathbf{r}_j] \right\} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \frac{3 + 4g}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{m_j \mathbf{r}_j}{r_{ij}}. \quad (2)$$

Здесь r_i , $\mathbf{r}_i$, $\ddot{\mathbf{r}}_i$ — координаты, скорость, ускорение в барицентрической системе координат i -го возмущаемого тела; r_j , $\mathbf{r}_j$, $\ddot{\mathbf{r}}_j$ — координаты, скорость, ускорение в барицентрической системе координат j -го возмущающего тела; $m_j = k^2 m_j$, где k^2 — гравитационная постоянная и m_j — масса j -го тела; $r_{ij} = |r_j - r_i|$, b и g — релятивистские параметры; $b = g = 1$; $u_i = |\mathbf{r}_i|$ и c — скорость света.

В работе [5] было показано, что с помощью неявного метода Адамса–Мултона 11-го порядка можно добиться практически такой же точности, что и в методе Эверхарта 27-го порядка. При отсутствии тесных сближений небесных тел друг с другом процесс численного интегрирования происходит в 4–5 раз быстрее.

При наличии тесных сближений, например, при исследовании эволюции орбит малых тел Солнечной системы, приемлемые результаты могут быть получены только при достаточно существенном уменьшении шага интегрирования в методе Адамса–Мултона и увеличении порядка аппроксимации до 16-го. Однако кратковременность таких моментов не приводит к значительному увеличению общего времени вычислительного процесса. Данная задача является особенно актуальной, поскольку тесные сближения астероидов с Землей могут представлять угрозу для жизни на нашей планете.

Исследование эволюции орбит малых тел, имеющих несколько тесных сближений на выбранном интервале времени, является одной из наиболее сложных задач, поскольку при каждом последующем сближении происходит достаточно резкое увеличение накапливаемых ошибок, возникающих в результате предыдущих сближений.

Для исследования устойчивости решения уравнений движения малых тел Солнечной системы, имеющих несколько тесных сближений на выбранном интервале времени, численное интегрирование с помощью метода Адамса–Мултона осуществлялось с различным шагом. Закладка начальных данных для старта многошагового метода производилась с помощью метода Эверхарта. В моменты тесных сближений порядок аппроксимации увеличивался с 11 до 16, а шаг интегрирования уменьшался в 5000 раз. По завершении сближения шаг и порядок метода возвращались к исходным значениям. В моменты смены шага и порядка вновь проводилась закладка таблицы интегрирования с помощью метода Эверхарта.

Сначала численное интегрирование производилось с начальным шагом h_1 . В результате вычислялись координаты $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ выбранного астероида для некоторых моментов времени t . Затем интегрирование проводилось заново с другим начальным шагом h_2 . В результате определялись координаты $x_2(t)$, $y_2(t)$, $z_2(t)$, несколько отличающиеся от координат $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ для тех же моментов времени. Для сравнения полученных координат вычислялись расстояния между положениями астероида, соответствующих координатам $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ и координатам $x_2(t)$, $y_2(t)$, $z_2(t)$, то есть определялись величины

$$r_{1,2}(t) = \sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2 + (z_1(t) - z_2(t))^2}, \quad (3)$$

по которым можно судить о точности вычислений.

Одним из исследуемых объектов, имеющих несколько тесных сближений, является астероид 99942 Apophis. С помощью метода прогноза и коррекции (1) было проведено численное интегрирование уравнений движения (2) для Солнца, больших планет, Луны и выбранного астероида с различным шагом: 0,25; 0,2; 0,125; 0,1 и 0,0625 дня. Затем по формуле (3) были вычислены отклонения $r_{1,2}(t)$ для шагов $h_1 = 0,25$ и $h_2 = 0,2$; для шагов $h_1 = 0,2$ и $h_2 = 0,125$; для шагов $h_1 = 0,125$ и $h_2 = 0,1$ и, соответственно, для шагов $h_1 = 0,1$ и $h_2 = 0,0625$ дня. Результаты вычислений отклонений $r_{1,2}(t)$ представлены в таблице.

Как видно из данных представленных таблице, при уменьшении шага с 0,25 до 0,1 дня отклонения $r_{1,2}(t)$ уменьшаются, что указывает на сходимость решения. При дальнейшем уменьшении шага точность ухудшается, что связано с ростом ошибок округления. На рисунке представлен график изменения отклонений $r_{1,2}(t)$ астероида 99942 Apophis в зависимости от даты и шага интегрирования.

Отклонения $r_{1,2}(t)$ астероида 99942 Апофис при вычислении с различным шагом интегрирования на интервале времени с 2007 по 2207 гг

Дата	Величина $r_{1,2}(t)$ в километрах для различных шагов h_1 и h_2			
	$h_1 = 0,25$ $h_2 = 0,2$	$h_1 = 0,2$ $h_2 = 0,125$	$h_1 = 0,125$ $h_2 = 0,1$	$h_1 = 0,1$ $h_2 = 0,0625$
31.12.2006	0	0	0	0
17.09.2026	$2,03 \cdot 10^{-5}$	$3,68 \cdot 10^{-5}$	$1,20 \cdot 10^{-5}$	$1,19 \cdot 10^{-5}$
24.02.2046	11,6671	6,56819	1,84083	2,20227
03.08.2065	0,46766	0,24881	0,06951	0,08316
10.01.2085	13,4979	8,69369	2,45743	2,94000
20.06.2104	3,16210	2,10584	0,59627	0,71334
28.11.2123	13,3693	8,56906	2,42150	2,89704
07.05.2143	111,913	72,2169	20,4149	24,4239
27.04.2160	270,946	174,804	49,4111	59,1120
05.10.2179	644,181	415,651	117,497	140,569
14.03.2199	10399,4	6705,80	1895,19	2267,12
01.06.2207	18782,8	12048,4	3396,16	4057,47

Отклонения $r_{1,2}(t)$ астероида 99942 Апофис в зависимости от даты и шага интегрирования на интервале времени с 2140 по 2207 гг.

Из таблицы и рисунка видно, что расхождение $r_{1,2}(t)$ в положении астероида 99942 Апофис при вычислении с шагом 0,125 и 0,1 дня за 200 лет не превосходит радиуса Земли. Таким образом, метод Адамса–Мултона может успешно применяться для исследования эволюции орбит малых тел Солнечной системы, имеющих несколько тесных сближений на интервалах времени порядка нескольких сотен лет, с целью выявления потенциально опасных астероидов, имеющих шанс столкновения с нашей планетой. Высокая скорость численного интегрирования в методе Адамса–Мултона позволяет сделать поиск подобного рода объектов более эффективным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А., Ольхин А. Г. Применение метода Эверхарта 31 порядка для решения уравнений движения больших планет // ВАК-2004. Горизонты Вселенной: Тез. докл. на Всеросс. астроном. конф. М.: МГУ, ГАИШ, 2004. С. 209.

2. Standish E. M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE 405 / LE 405 // Jet Prop Lab Technical Report. IOM 312. F-048. 1998. P. 1–7.
3. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
4. Newhall X. X., Standish E. M. Jr., Williams J. G. DE 102: a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries // Astron. and Astrophys., 1983. No. 125. P. 150–167.
5. Абрамов В.В. Применение методов Адамса к решению уравнений движения больших планет, Луны и Солнца // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Третьей Всерос. научн. конф. Ч. 3. Самара: СамГТУ, 2006. С. 13–19.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП. 2.1.1.1689).

Поступила 20.09.2006 г.

УДК 521.1, 521.4

С. С. Денисов

ВЫЯВЛЕНИЕ АСТЕРОИДОВ ГРУППЫ АТОНА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛЬНУЮ УГРОЗУ ДЛЯ ЗЕМЛИ

Проведено исследование эволюции орбит 321 астероида группы Атона на интервале времени 400 лет (1800–2200гг.) Выявлено пять астероидов, сближающихся с Землей на расстояние менее 150000 км.

Исследование эволюции орбит астероидов, сближающихся с Землей, является одним из важнейших этапов в решении проблемы астероидной опасности. Как показывает всесторонний анализ, проблема астероидной опасности, связанная с прогнозированием столкновения крупных небесных объектов с Землей и предотвращением катастрофических последствий, сложна и далека от окончательного решения.

При изучении движения астероидов особое внимание следует уделить группам астероидов Аполлона, Амура, Атона, так как орбиты этих объектов могут касаться орбиты Земли или проникать внутрь нее, что влечет за собой опасность столкновения. В группу Атона включаются те астероиды, большие полуоси орбит которых не превосходят большую полуось орбиты Земли, т.е. не более 1 а.е. (149597870 км). В настоящее время насчитывается 393 астероида, принадлежащих к группе Атона.

В качестве математической модели, описывающей движение астероида, использованы дифференциальные уравнения с учётом гравитационных и релятивистских эффектов [1]. Наряду с возмущениями от Солнца, больших планет (с Меркурия по Плутон) и Луны, учитывалось влияние пояса астероидов, смоделированного 50 частицами, расположенными на орбите, принадлежащей поясу астероидов, и равномерно распределёнными по величине средней аномалии [2]. Эти 72 уравнения решались методом Эверхарта 27 порядка с переменным шагом интегрирования [3, 4]. Данный метод является неявным, т.е. результат представляется не в виде ряда Тейлора, а в виде обобщённого многочлена, наилучшим образом аппроксимирующим искомую функцию, коэффициенты которого находятся методом неопределённых коэффициентов. Разработан ряд программ, реализующих этот метод до 31 порядка точности включительно, и адаптированных под решение астероидной задачи. Координаты и скорости планет, вычисленные нами, были согласованы с DE405 — одной из самых точных численных теорий движения больших планет, Луны и Солнца, а величины и даты сближений с Землёй совпадают с наблюдениями [5].

Исходные данные элементов орбит астероидов были взяты из банка данных DASTCOM (Database of ASTeroids and COMets) американской Лаборатории реактивного движения (JPL) на различные моменты времени*. Шаг интегрирования был взят равным одним суткам. В моменты сближений шаг постепенно уменьшался до 0,001 дня (1 минуты 26,4 секунд), затем также постепенно возвращался к исходному значению. Критерием изменения шага служило минимальное расстояние между исследуемым объектом и объектами Солнечной системы (за исключением пояса астероидов).

* <ftp://ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb.htm>