Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Павлов, А. В. Алимов, А. П. Купцов, Вращательное движение диска внутри вертикального подвижного цилиндра, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 176–177

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 10:41:35

Теоретическая механика

УДК 531

Г. В. Павлов, А. В. Алимов, А. П. Купцов

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДИСКА ВНУТРИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОДВИЖНОГО ЦИЛИНДРА

Предложено применение метода усреднения Н. Н. Моисеева к уравнению с двумя угловыми координатами и к многомерным математическим моделям с неголономными связями.

Как известно [1], задача о движении диска в вертикальном подвижном цилиндре приводит к системе четырёх дифференциальных уравнений движения и трех уравнений неголономных связей. Вследствие существенной нелинейности уравнений, интегрирование их в аналитическом виде связано с большими математическими трудностями. Поэтому процедура интегрирования уравнений связана с различием темпов изменения переменных. Принимая доминирующую роль на динамику диска медленно изменяющихся в течение одного периода угловых скоростей $\dot{j}$ и $\dot{g}$ и оценивая переменные a и b как вызывающие малые вибрации диска, допуская возможным в первом приближении проигнорировать их влияние, считая их константами. Такой подход к решению задачи эквивалентен предложенному В. М. Волосовым усреднению быстро осциллирующих переменных, что приводит к выделению уравнений движения, описывающих медленные, эволюционные процессы изменения угловых скоростей $\dot{j}$ и $\dot{g}$, а также монотонно возрастающих функций j и g . Запишем систему уравнений, описывающих ротационное движение диска

$$J_z \ddot{j} + f_1(j, g) = e j_1(j, g, \dot{j}, \dot{g}), \quad J_z \ddot{g} + f_2(j, g) = e j_2(j, g, \dot{j}, \dot{g}). \quad (1)$$

Здесь $f_1(j, g) = -a_1 \cos 2(j + g)$, $f_2(j, g) = -b_1 \cos(j + g)$, $j_1(j, g, \dot{j}, \dot{g}) = a_2 - a_3 \dot{j} -$

$$-a_4 \dot{j}^2 \cos^2(j + g) + a_5 \dot{j}^2 \sin(j + g) \cos(j + g) - a_6 \dot{j}^2 \cos^3(j + g) \sin(j + g);$$

$$j_2(j, g, \dot{j}, \dot{g}) = b_2 \cos^3(j + g) - b_3 \dot{j} \cos(j + g) - b_4 \dot{j} \cos^3(j + g) - b_5 \dot{j}^2 \sin(j + g) -$$

$$-b_6 \dot{j}^2 \cos^2(j + g) \sin(j + g);$$

$$a_1 = \frac{M_0 M r^2}{2(J_z + 4m r^2 + M r^2)^2}; \quad a_2 = a_1 + \frac{M_0}{(J_z + 4m r^2 + M r^2)}; \quad a_3 = \frac{k_1}{(J_z + 4m r^2 + M r^2)};$$

$$a_4 = \frac{k_1 M r^2}{(J_z + 4m r^2 + M r^2)^2}; \quad a_5 = \frac{M r^2}{(J_z + 4m r^2 + M r^2)}; \quad a_6 = \frac{M r^4}{(J_z + 4m r^2 + M r^2)^2};$$

$$b_1 = \frac{M_0 r}{(J_z + 4m r^2 + M r^2) R}; \quad b_2 = \frac{M_0 M r^3}{(J_z + 4m r^2 + M r^2)^2 R}; \quad b_3 = \frac{k_1 r}{(J_z + 4m r^2 + M r^2) R};$$

$$b_4 = \frac{k_1 M r^3}{(J_z + 4m r^2 + M r^2) R}; \quad b_5 = \frac{r}{R}; \quad b_6 = \frac{4M m r^5}{(J_z + 4m r^2 + M r^2)^2 R}.$$

Здесь используются следующие обозначения: $M_{\text{вп}} = M_0 + k_1 \dot{j}$ — вращающий момент; M — масса цилиндра; m — масса диска; R — радиус цилиндра; r — радиус диска; J_z — осевой момент инерции диска; e — малый параметр. Присутствие малого параметра связано с наличием малых коэффициентов при ограниченных угловых скоростях вращения диска.

Найдем решение системы (1) в предположении большой начальной энергии, что отвечает вращательному движению диска. Применяя подстановку $z = j + g$, преобразуем порождающие уравнения системы (1) в одномерное уравнение

$$J_z \ddot{z} - f(z) = 0, \quad (2)$$

где $f(z) = a_1 \cos 2z + b_1 \cos z$. Точное решение этого уравнения выражается через эллиптические функции. Асимптотическое представление общего интеграла имеет вид

$$z = qt - \frac{1}{q^2} \left(b_1 (\cos qt - 1) - 0,5 a_1 \sin^2 qt \right), \quad (3)$$

где $q = w - \Omega$ — постоянная, имеющая размерность угловой скорости; w и Ω — фиксированные значения переменных j и g , в окрестности которых происходит построение асимптотики порождающих решений. При малой разности угловых скоростей j и g второе слагаемое в (3) может играть доминирующую роль. Общие решения порождающих уравнений системы (1) найдем простым взятием квадратур:

$$j = wt + \frac{0,25a_1}{q} \left(\cos \frac{a_1}{2} (1 - \cos 2qt) - 2 \sin \frac{a_1}{2} (qt - 2 \sin 2qt) \right), \quad (4)$$

$$g = -\Omega t + \frac{b_1}{q} \left(\cos \frac{a_2}{2} (1 - \cos qt) \right) - \sin \frac{a_2}{2} (qt - \sin qt), \quad (5)$$

где $a_1 = \frac{(8m+2M)M_0 r^3}{(J_z + (4m+M)r^2)^2 R}$, $a_2 = \frac{(4m+M)M_0 r^3}{(J_z + (4m+M)r^2)^2 R}$.

Для применения метода усреднения к системе уравнений (1), следуя асимптотике Н. Н. Моисеева [2], введем новые переменные x_j, y_j, x_g и y_g согласно формулам

$$j = y_j + x_j \left(\cos \frac{a_1 x_j}{0,25a_1} (1 - \cos 2(y_j - y_g)) - 2 \sin \frac{a_1 x_j}{0,25a_1} (y_j - y_g - 2 \sin 2(y_j - y_g)) \right), \quad (6)$$

$$g = -y_g + x_g \left(\cos \frac{a_2 x_g}{b_1} (1 - \cos(y_j - y_g)) - \sin \frac{a_2 x_g}{b_1} (y_j - y_g - \sin(y_j - y_g)) \right). \quad (7)$$

Сопоставляя выражения (6), (7) с асимптотическим представлением решений (4), (5), получаем $x_j = \frac{0,25a_1}{q}$, $x_g = \frac{b_1}{q}$, $y_j = wt$, $y_g = \Omega t$. Физический смысл этих переменных очевиден: y_j, y_g — фазы колебаний, x_j и x_g — амплитуды колебаний угловых скоростей — отклонения от равномерного вращения.

Угловые скорости j и g имеют вид

$$j = w + 2\sqrt{0,25a_1 x_j} \left(\cos \frac{4x_j a_1}{a_1} \sin 2(y_j - y_g) - \sin \frac{4x_j a_1}{a_1} + 4 \cos 2(y_j - y_g) \sin \frac{4x_j a_1}{a_1} \right),$$

$$g = -\Omega - \sqrt{x_g b_1} \left(\sin \left(y_j - y_g + \frac{x_g a_2}{b_1} \right) - \sin \frac{x_g a_2}{b_1} \right). \quad (8)$$

Амплитудные уравнения метода усреднения находятся в соответствии с [2] по формулам

$$\dot{x}_j = -\frac{e}{2} x_j^{\frac{3}{2}} j_1(j, g, j, g), \quad \dot{x}_g = -\frac{e}{2} x_g^{\frac{3}{2}} j_2(j, g, j, g). \quad (9)$$

Здесь штрих означает производную по фазам y_j и y_g .

Разлагая правые части уравнений (1) $j_1(j, g, j, g)$ и $j_2(j, g, j, g)$ в ряды Тейлора в окрестности нулевых значений амплитуд x_j и x_g , и усредняя по быстрым фазам y_j и y_g запишем амплитудные уравнения в явном виде

$$\dot{x}_j = \frac{1}{4p} \left(-78,9a_2 x_j^{\frac{3}{2}} + (78,9a_3 + 39,4a_4) x_j^{\frac{3}{2}} w + \sqrt{a_1} (-39,4a_5 + 19,7a_6) x_j^2 w \right), \quad \dot{x}_g = 0. \quad (10)$$

Система уравнений (10) доставляет три стационарные амплитуды: $x_{j1} = x_{j2} = 0$ и $x_{y1} = \text{const}$.

Решение указывает, что диск будет совершать устойчивые пространственные колебания с постоянными амплитудами по обеим координатам j и g .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бородин В. С. Движение диска в режиме обкатывания подвижного цилиндра // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ. – мат. науки, 2004. Вып. 30. С. 206–208.
2. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380 с.

Поступила 27.03.2006 г.