Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Яценко, К. В. Яценко, Магнитный эффект Ааронова–Бома: рассмотрение без векторного потенциала, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 184–187

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 06:14:35

МАГНИТНЫЙ ЭФФЕКТ ААРОНОВА-БОМА: РАССМОТРЕНИЕ БЕЗ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрен квантовый интерференционный эффект Ааронова-Бома. В качестве источника магнитного поля был выбран тороидальный соленоид с постоянным током. Показано, что используемая геометрия источника магнитного поля позволяет достаточно строго получить правильные результаты без стандартного привлечения понятий векторного потенциала и обобщенного импульса.

К числу наиболее известных квантовомеханических эффектов бессилового воздействия электромагнитного поля на заряженную частицу относится эффект Ааронова-Бома [1–3]. Эффект Ааронова-Бома ярко проявляется на примере нелокального воздействия магнитного поля, полностью сосредоточенного внутри непроницаемого бесконечно длинного соленоида, на движущуюся заряженную частицу.

Теоретическое изучение данного эффекта сводится к решению задачи о рассеянии плоской волны (волновая функция частицы существует лишь там, где магнитное поле отсутствует), на бесконечно тонком соленоиде. При этом уравнение Шредингера для волновой функции заряженной частицы содержит так называемый обобщенный импульс $\vec{P} = \vec{p} + q\vec{A}/c$ (здесь $\vec{p}$ — обычный импульс частицы; q — заряд частицы; $\vec{A}$ — векторный потенциал). В свою очередь, понятие обобщенного импульса нуждается в обосновании и вводится с помощью вариационных принципов [4].

В данной работе рассматривается квантовый интерференционный эффект Ааронова-Бома без привлечения понятий векторного потенциала и обобщенного импульса. На рисунке *a* изображена схема для наблюдения «двухлучевой» интерференционной картины, возникающей при наложении двух когерентных волн. При этом первоначальная волна, соответствующая движущейся частицы, разделяется каким-либо образом (например, на не показанной на рисунке бипризме) на две волны (пучка), одна из которых (верхний пучок 1) распространяется вне тороидального соленоида 3, вторая (нижний пучок 2) — через тороидальный соленоид. Затем эти когерентные пучки сводятся вместе и дают на экране интерференционную картину 5.

Схематическое изображение возникновения интерференционной картины в эффекте Ааронова-Бома: 1 и 2 — интерферирующие волны; 3 — тороидальный соленоид с постоянным током; 4 — источник тока с компенсирующей ЭДС; 5 — экран для наблюдения интерференционной картины

Как известно, результат такой «двухлучевой» интерференции будет определяться разностью фаз первой и второй волн. Первая волна описывается волновой функцией — волной де Бройля свободной частицы:

$$\Psi(\vec{r}, t) = C e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}, \quad (1)$$

где C — комплексная постоянная; E — энергия частицы; $\vec{p}$ — её импульс; $\hbar$ — постоянная Планка. Частота этой волны равна $E/\hbar$, а её волновой вектор $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$. Вторую волну можно описать аналогично, однако к энергии E следует добавить энергию взаимодействия W частицы с соленоидом [5]. Эта энергия взаимодействия зависит от положения движущейся частицы относительно тороидального соленоида и определяет эволюцию волновой функции. Таким образом, вторая волна получает дополнительный сдвиг фазы $\Delta\phi$, который и будет найден далее путем сравнительно несложных расчетов.

В работе [6] рассматривалось равномерное движение заряженной частицы относительно массивного покоящегося тороидального соленоида с постоянным током (рисунке, б). Пусть соленоид содержит N витков, радиусы которых значительно меньше радиуса b осевой окружности тороида. Равномерно движущийся заряд q создаёт магнитное поле, напряжённость $\vec{H}$ которого определяется соотношением [4]

$$\vec{H} = \frac{q(1-\beta^2)[v \vec{r}]}{cr^3(1-\beta^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad (2)$$

где c — скорость света; $\beta = v/c$; $\vec{r}$ — радиус-вектор от заряда к точке наблюдения (виток соленоида); φ — угол между вектором $\vec{r}$ и осью Ox (см. рисунок б). Величины $\vec{r}$ и φ берутся в момент наблюдения в неподвижной системе отчёта. Из этой формулы следует другое, более удобное, выражение, в котором магнитное поле зависит от координаты x (при тех же условиях):

$$h(x) = \frac{(1-\beta^2)qvb}{c[x^2 + (1-\beta^2)b^2]^{3/2}}. \quad (3)$$

При движении заряда витки тороида пронизывает изменяющийся со временем магнитный поток и, следовательно, наводится э.д.с. индукции, которая стремится изменить величину силы тока в соленоиде. Найдем работу, совершаемую источником э.д.с. 4 (рисунок а), включенным в цепь соленоида (рисунок а; 4) с целью поддержания постоянства тока. Работа этой переменной э.д.с. источника и будет равна энергии взаимодействия заряд – соленоид. Пусть заряд перемещается из минус бесконечности в точку с координатой $x = vt$. Э.д.с. индукции, наводимая в одном витке соленоида (для удобства будем рассматривать модули э.д.с. и работы), равна

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{c} \frac{d\tilde{\Phi}}{dt},$$

где $\tilde{\Phi}$ — магнитный поток через виток площадью s , обусловленный магнитным полем равномерно движущегося заряда:

$$\tilde{\Phi}(t) = h(t)s.$$

Тогда работа источника тока окажется равной

$$W(t) = N \int_{-\infty}^t \varepsilon_1 J dt = \frac{N}{c} J \tilde{\Phi}(t). \quad (4)$$

Учитывая выражение (3) для $h(x)$, найдем модуль энергии взаимодействия $W(x)$:

$$W(x) = \frac{NJ(1-\beta^2)qvbs}{c^2[x^2 + (1-\beta^2)b^2]^{3/2}}. \quad (5)$$

Энергия взаимодействия системы может быть найдена и другим способом. Полная энергия системы без учета кинетической энергии заряженной частицы обусловлена суммарным магнитным полем, созданная соленоидом и движущейся частицей. Эта энергия запишется в виде

$$W_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\vec{H} + \vec{h})^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \int_{V_T} H^2 dV + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2 dV + \frac{1}{4\pi} \int_{V_T} \vec{H} \vec{h} dV, \quad (6)$$

где V_T — объем элементарного тороидального соленоида; $V_T = 2\pi bs$. Первый член в (6) дает собственную энергию соленоида, второй — собственную энергию магнитного поля заряда, последний — энергию взаимодействия W' . Поскольку рассматривается элементарный тороид ($s^{1/2} \ll b$), в которых величины $\vec{H}$ и $\vec{h}$ следует считать постоянными, для модуля энергии взаимодействия получим

$$W' = \frac{hH}{4\pi} V_T, \quad (7)$$

где собственное поле в тороидальном соленоиде $H = \frac{2NJ}{cb}$. Подставляя в (7) выражение (3), окончательно имеем

$$W'(x) = \frac{NJ(1-\beta^2)qvbs}{c^2[x^2 + (1-\beta^2)b^2]^{3/2}}. \quad (8)$$

Этот результат совпадает с результатом (5), полученным выше другим способом. Дополнительный сдвиг (набег) фазы второй волны под влиянием магнитного поля соленоида найдем с помощью выражения (1):

$$\Delta\varphi(t) = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^t W(t) dt. \quad (9)$$

Здесь, как и в дальнейшем, будем считать, что источник частиц находится бесконечно далеко от соленоида. Воспользуемся соотношениями (8) и (9) и перейдем от временной зависимости сдвига фазы к зависимости от координаты x :

$$\Delta\varphi(x) = \frac{HV_T(1-\beta^2)qb}{4\pi\hbar c} \int_{-\infty}^x \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}}, \quad (10)$$

где введено обозначение $a^2 = (1-\beta^2)b^2$. Интегрируя последнее выражение, для сдвига фазы окончательно получим

$$\Delta\varphi(x) = \frac{HV_T q}{4\pi\hbar cb} [x(x^2 + a^2)^{-1/2} - 1]. \quad (11)$$

В экспериментах по наблюдению магнитного эффекта Ааронова–Бома источник частиц (на рисунке не показан) и экран 5 (рисунок *a*) находятся достаточно далеко от соленоида 3. В этом случае выражение (11) для сдвига фазы упрощается:

$$\Delta\varphi = \frac{\Phi q}{\hbar c}, \quad (12)$$

где Φ — магнитный поток в соленоиде, обусловленный его собственным током $\Phi = H(J)s$. Очевидно, если $\Delta\varphi = 2\pi n$ (n — целое число), то наблюдаемая на экране интерференционная картина не изменится. В соответствии с (12) такая ситуация возникает при определенных значениях магнитного потока $\Phi = 2\pi\hbar c/q$. Значению $n=1$ соответствует так называемый квант магнитного потока $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/q$. Другими словами, если магнитный поток в соленоиде равен целому числу (n) квантов потока, т.е. $\Phi = n\Phi_0$, то интерференционная картина остаётся неизменной. Отметим также, что найденное выражение для кванта потока Φ_0 совпадает с минимальным значением магнитного потока сверхпроводящего кольца с током при условии замены заряда q куперовской парой, $q \rightarrow 2e$. При этом квант магнитного потока равен

$$\Phi_0 = \pi\hbar c/e \approx 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}.$$

Рассмотренный выше магнитный эффект Ааронова–Бома относится к группе активно исследуемых в последнее время квантовых интерференционных явлений. Интерес к изучению этих явлений, имеющих концептуальный характер, обусловлен и их практическим значением, связанным со всё возрастающей ролью нанотехнологий в электронике. В настоящей работе показано, что теория данного квантового эффекта может быть изложена без привлечения сложного математического аппарата на основе тех знаний квантовой механики, которые входят в курс общей физики для вузов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Aharonov Y., Bohm D.* Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory // *Phys. Rev.*, 1959. Vol. 115. P. 485.
2. *Фейнберг Е. Л.* Об «особой роли» электромагнитных потенциалов в квантовой механике // *Успехи физ. наук.* Т. 78, Вып. 1. С. 53–64.
3. *Tomotura A., Yano S., Osakabe N. et.al.* Proof of the Aharonov-Bohm effect with completely shielded-magnetic field // *Proc. 2 Int Symp. Found Quantum Mech. Light New Technol.* Tokyo, 1987. P. 97–105.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
5. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1978. Т. 8–9. 524 с.
6. *Яценко В. А.* Система «заряд-тороидальный соленоид» как пример «одностороннего» взаимодействия // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки*, 2003. Вып. 19. С. 186–189.

Поступила 28.05.2006 г.