Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Прохоров, В. В. Графкин, Анализ погрешности аппроксимации структурных функций ортогональными функциями экспоненциального типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 188–190

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:19:09

Математическое моделирование

УДК 681.518.3, 514:681.323/043.3/

С. А. Прохоров, В. В. Графкин

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Приводится методика и результаты анализа погрешностей аппроксимации структурных функций ортогональными функциями экспоненциального типа.

При анализе случайных процессов со стационарными приращениями одной из важных характеристик является структурная функция (СФ). Для получения аналитического выражения структурной функции её можно представить в виде ряда

$$S_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau, \alpha) - m_s, \quad (1)$$

где β_k — коэффициент разложения; m_s — число, равное либо $S_x(\infty)$, либо математическому ожиданию структурной функции; $\psi_k(\tau)$ — семейство базисных функций, ортогональных с весом $\mu(\tau)$ на интервале $[0, \infty)$ (структурная функция существует в диапазоне $[0, \infty)$, поэтому ортогональные функции, применяемые при ее аппроксимации, должны существовать на этом интервале). Это семейство характеризуется интегралом

$$\int_0^{\infty} \mu(\tau) \psi_m(\tau) \psi_n(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n; \\ \|\psi_k\|^2, & \text{при } m = n, \end{cases} \quad (2)$$

где $\|\psi_k\|^2$ — норма ортогональной функции $\psi_k(\tau)$.

Для модели структурной функции (1) коэффициенты разложения [1], обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left(S_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\tau) \right)^2 d\tau = \min, \quad (3)$$

определяются выражением

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_0^{\infty} S_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau) d\tau. \quad (4)$$

При этом погрешность аппроксимации (3) равна

$$\Delta = \int_0^{\infty} S_x^2(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 \quad (5)$$

Наиболее часто используется относительная погрешность аппроксимации

$$\delta = \frac{\Delta}{\int_0^{\infty} S_x^2(\tau) d\tau}. \quad (6)$$

Были получены результаты определения погрешности аппроксимации структурных функций различного вида ортогональными функциями (Лагерра, Лежандра и Дирихле) в зависимости от числа членов разложения ряда m и параметра масштаба ортогональных функций α . Анализ этих результатов позволил сделать вывод о том, что при постоянном значении числа членов разложения ряда погрешность существенно зависит от параметра масштаба α . Также необходимо отметить, что постоянное увеличение числа членов разложения ряда m не приводит к уменьшению погрешности.

Последнее замечание во многом объясняется тем, что на практике интервал наблюдения структурной функции является величиной конечной, а также в большинстве своем обрабатываемый процесс представляет собой статистический числовой ряд, полученный в результате проведенных экспериментов а, выборка значений случайного процесса является ограниченной. В связи с этим коэффициенты разложения β_k будут вычисляться по следующей формуле

$$\beta_k = \Phi(\mathcal{S}_x(\Delta\tau \cdot i) \cdot \psi_k(\Delta\tau \cdot i), \tau_m, N), \quad (7)$$

где τ_m – интервал существования СФ; $\Delta\tau$ – шаг дискретизации; N – объем выборки; $i = 1, 2, \dots, M$; $M = \left\lceil \frac{\tau_m}{\Delta\tau} \right\rceil$ ($\lceil \cdot \rceil$ – символ целой части). При этом возникает погрешность

$$\Delta_{\beta_k} = \beta_k - \beta_k. \quad (8)$$

Конечность интервала существования СФ и интегрирование численными методами будут вносить в результирующую погрешность систематическую составляющую, а ограниченность выборки значений СФ — случайную составляющую.

Погрешность определения членов разложения ряда Δ_{β_k} можно проанализировать на примере следующей СФ:

$$S_x(\tau) = 2\sigma_x^2 \left[e^{-|\lambda|\tau} \cos(\omega\tau) - 1 \right] - m_s, \quad (9)$$

где σ_x^2 — дисперсия процесса; λ, ω — параметры структурной функции; $m_s = M[S_x(\tau)]$ — среднее значение СФ.

Учитывая данные условия, выражение, определяющее коэффициенты разложения (4) при аппроксимации ортогональными функциями Лагерра, будет иметь вид

$$\beta_k = \alpha \sum_{s=0}^k A_{k,s}(\alpha) \left(\frac{2\sigma_x^2 \cos^{s+1} \varphi \cos((s+1)\varphi)}{B^{s+1}} - \frac{m_s + 2\sigma_x^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{s+1}} \right), \quad (10)$$

где $A_{k,s}(\alpha) = (-1)^k \frac{k!}{(k-s)!s!} \alpha^s$; $B = \lambda + \frac{\alpha}{2}$; $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{B}\right)$.

При аппроксимации функциями Лежандра выражение, определяющее коэффициенты разложения, будет иметь вид

$$\beta_k = 2(2k+1)\alpha \sum_{s=0}^k A_{k,s} \left(\frac{2\sigma_x^2 \cos^2 \varphi_s}{B_s} - \frac{m_s + 2\sigma_x^2}{(2s+1)\alpha} \right), \quad (11)$$

где $A_{k,s} = (-1)^s \frac{(k+s)!}{(k-s)!(s!)^2}$; $B_s = \lambda + (2s+1)\alpha$; $\varphi_s = \arctg\left(\frac{\omega}{B_s}\right)$.

При аппроксимации функциями Дирихле имеем

$$\beta_k = 2(k+1)\alpha \sum_{s=0}^k A_{k,s} \left(\frac{2\sigma_x^2 \cos^2 \varphi_s}{B_s} - \frac{m_s + 2\sigma_x^2}{(s+1)\alpha} \right), \quad (12)$$

где $A_{k,s} = (-1)^{k-s} \frac{(k+s+1)!}{(k-s)!(s+1)!s!}$; $B_s = \lambda + (s+1)\alpha$; $\varphi_s = \arctg\left(\frac{\omega}{B_s}\right)$.

Используя полученные выражения, можно оценить Δ_{β_k} . Согласно методике, изложенной в РТМ 25139—74 [2], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки β_k вида

$$\Delta = \max \left\{ |\Delta_j| \right\}, j = 1, 2, \dots, M, \quad (13)$$

где M — число испытаний, зависящее от доверительной вероятности P_d . Например, если $P_d = 0,95$, то число испытаний равно 29, независимо от закона распределения погрешностей.

Необходимо отметить, что в случае, когда аппроксимация производится с помощью ортогональных функций Лагерра, Лежандра или Дирихле, при различных количествах реализаций N погрешность определения коэффициентов разложения Δ_{β_k} возрастает с увеличением порядка ортогональной функции k (типичная картина представлена на рис. 1). В свою очередь, коэффициенты разложения β_k должны обеспечивать минимум квадратической погрешности аппроксимации (3), которая при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю [3] (рис. 2).

Р и с. 1. Погрешность вычисления β_k : 1 – $N=5000$; 2 – $N=2000$; 3 – $N=1000$

Из рис. 2 видно, что существует оптимальное число членов разложения ряда m_{opt} , при котором результирующая погрешность аппроксимации, включающая квадратическую погрешность аппроксимации и погрешность вычисления коэффициентов разложения, минимальна.

Для оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения можно воспользоваться выражениями, представленными в [4], с помощью которых можно определить, что при аппроксимации ортогональными функциями Лагерра, Лежандра и Дирихле имеет место колебательность среднеквадратических отклонений оценок σ_{β_k} относительно некоторой величины при увеличении порядка ортогональной функции k типичный пример расчета представлена на рис. 3.

Р и с. 2. Оптимальное число членов разложения ряда: 1 – погрешность вычисления коэффициентов разложения; 2 – квадратическая погрешность аппроксимации

Р и с. 3. Зависимость среднеквадратического отклонения β_k от величины порядка k : 1 – $N=5000$; 2 – $N=2000$; 3 – $N=1000$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Прохоров С. А., Графкин В. В. Аппроксимация структурных функций случайных процессов // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Третьей Всерос. конф. Ч. 4: Математические модели в информационных технологиях. Самара: СамГТУ, 2006. С. 82.
2. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25139–74 // Минприбор, 1974. 76 с.
3. Прохоров С. А. Моделирование и анализ случайных процессов / Лабораторный практикум. 2-е изд., переработанное и дополненное. Самара: СНЦ РАН, 2002. 278 с.
4. Прохоров С. А., Графкин А. В. Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах. Самара: СНЦ РАН, 2005. 198 с.

Поступила 31.07.2006 г.