Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Никонов, О решении уравнения, отображающего реакцию двухэлементной цепи на синусоидальное воздействие, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 191–194

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:32:47

А. И. Никонов

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ, ОТОБРАЖАЮЩЕГО РЕАКЦИЮ ДВУХЭЛЕМЕНТНОЙ ЦЕПИ НА СИНУСОИДАЛЬНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Рассмотрено обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, в котором искомая функция выражает реакцию двухэлементной физической цепи на гармоническое воздействие. Его решение как комбинация элементарных функций найдено с использованием формул Тейлора и Лейбница.

В настоящей работе представляются результаты решения начальной задачи применительно к обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$y' + (\rho/\lambda)y = (1/\lambda)\sin \omega x, \quad (1)$$

где y, y' — искомая функция действительного аргумента x и её первая производная dy/dx ; $\rho > 0, \lambda > 0$ — многочлены от аргумента x , заданные в пределах известного интервала $I_x = [x_0, x_b]$, причем величина r является суммой $(r_L + r_R)$ с естественно выделенной производной $I' = dI/dx = r_L$; $\tilde{\omega} = 2p$. Начальное значение искомой функции $y(x_0) = y_0$ определяется по известному уровню x_0 . Правая часть (1) ниже будет обозначаться также через $q = q(x)$.

Уравнения вида (1) используются при описании действия пар последовательно включенных индуктивных и резистивных элементов электрических цепей, которые в общем случае функционируют в динамическом режиме, когда параметры каждой цепи с указанной элементной базой (индуктивность и активное сопротивление) зависят от времени t . Уравнение (1) может

Р и с. 1. Схема подачи воздействия u в цепь последовательного соединения элементов с параметрами L, R

быть составлено с использованием аппарата операционно-параметрического моделирования [1, 2] применительно к параметрической схеме, показанной на рис. 1, где обозначено: $u = u(t) = U_m \sin \omega t$ — синусоидальное напряжение — воздействие с известными амплитудой U_m и круговой частотой $\omega = 2p/T$ (T — период синусоиды); $i = i(t)$, $i'_t = i'_t(t) = di/dt$ — искомый ток и его временная производная; $L = L(t) > 0, R = R(t) > 0$ — индуктивность и активное сопротивление рассматриваемой физической цепи, которые являются аналитическими функциями [3] и исходно представляются как многочлены; Σ — символ суммирования.

Структура, показанная на рис. 1, отображает следующую взаимосвязь общего синусоидального воздействия $u(t)$ на рассматриваемую цепь, обладающую параметрами $L(t), R(t)$, и реакции — искомого тока i :

$$Li'_t + (L'_t + R)i = u, \quad L'_t = L'_t(t) = dL/dt. \quad (2)$$

Наличие неединичного переменного коэффициента L перед записью величины i'_t обусловлено здесь физической сущностью моделируемого явления. Поскольку при этом $L \neq 0$ ($L > 0$) уравнение (2) может быть модифицировано как

$$i'_t + ((L'_t + R)/L)i = (1/L)u. \quad (3)$$

Перевод компонентов (3) в безразмерную форму путем их нормирования позволяет получить линейное дифференциальное уравнение вида (1), в котором используются аргумент $x = t/T$, искомая функция $y = i/I_N$ ($I_N \neq 0$ — нормировочный уровень тока), и её производная по x $y' = (1/I_N) i'_t (dt/dx) = (T/I_N) i'_t$, а многочлены $r_L = L'$, r_R представляют величины, определяемые (с учетом их масштабирования) соответственно временными изменениями индуктивности (L') и активного сопротивления (R) рассматриваемой цепи. Интервал I_x при этом соответствует исходному отрезку наблюдения I_t с заданным начальным моментом t_0 ; $x_0 = t_0/T$.

Используя известное аналитическое представление линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка [3, 4], общее решение начальной задачи (1) можно представить следующим образом:

$$y = \left(y_0 + \int_{x_0}^x q \exp \left(\int_{x_0}^x (r/l) dx \right) \right) / \exp \left(\int_{x_0}^x (r/l) dx \right); \quad (4)$$

$$\exp \left(\int_{x_0}^x (r/l) dx \right) = \exp \left(\int_{x_0}^x (l'/l) dx \right) f_R(x) = (l/l_0) f_R(x); \quad (5)$$

$$f_R(x) = \exp \int_{x_0}^x f_R dx, \quad f_R = f_R(x) = r_R/l; \quad l_0 = l(x_0). \quad (6)$$

Функции $f_R(x)$, $f_R(x)$, r_R , (l/l) (с учетом их определений на интервале I_x) непрерывны и имеют производные любых порядков.

Представление величины $f_R(x)$ формулой Тейлора со степенями $h = (x - x_0)$, выполняемое при соблюдении условий сходимости соответствующего ряда [5-6] (полагаем эти условия соблюдаемыми), предусматривает использование производных данной величины по x различных порядков (m) , берущихся при значении аргумента, равному x_0 :

$$f_R^{(m)}(x_0) = d^m f_R / dx^m \Big|_{x_0};$$

$m \in Z_0$ (Z_0 — множество целых неотрицательных чисел).

Значения $f_R^{(m)}(x_0)$ могут быть выражены как

$$f_R^{(m)}(x_0) = \begin{cases} f_R^{(0)}(x_0) = f_R(x_0) = e^0 = 1; & m = 0; \\ (f_R f_R)^{(m)}(x_0); & m = m-1 \geq 0. \end{cases}$$

Используя формулу Лейбница [5], имеем ($l = 1, 2, \dots, m$)

$$(f_R f_R)^{(m)}(x_0) = \sum_{l=0}^m C_m^l f_R^{(m-l)}(x_0) f_R^{(l)}(x_0); \quad (7)$$

C_m^l — биномиальный коэффициент; $f_R^{(l)} = d^l f_R / dx^l \Big|_{x_0}$.

Нахождение значений производных вида $f_R^{(l)}(x_0)$ предусматривает дополнительное применение формулы Лейбница ($x = 0, 1, 2, \dots, l$):

$$f_R^{(l)}(x_0) = \sum_{x=0}^l C_l^x r_R^{(i-x)}(x_0) (1/l)^{(x)}(x_0); \quad (8)$$

$$r_R^{(i-x)}(x_0) = d^{(i-x)} r_R / dx^{(i-x)} \Big|_{x_0}, \quad (1/l)^{(x)}(x_0) = d^x (1/l) / dx^x \Big|_{x_0}.$$

Итак, соотношения (7)–(8) обеспечивают возможность рекуррентного оценивания величин вида $(f_R f_R)^{(m)}(x_0)$, входящих в выражение $f_R^{(m)}(x_0)$.

Применительно к функции $f_R(x)$ формула Тейлора [5, 6] выражается следующим образом:

$$f_R(x) = \sum_{m=0}^n f_R^{(m)}(x_0) h^m / m! + r_{fR}, \quad (9)$$

где $n \in Z_0$; r_{fR} — остаточный член, причем для определенности будем полагать, что он имеет здесь форму Лагранжа, то есть

$$r_{fR} = h^{(n+1)} f_R^{(n+1)}(k) / (n+1)!, \quad k \in (x_0, x_b).$$

При установлении факта сходимости ряда Тейлора с компонентами рассматриваемого вида возможно учитывать то обстоятельство, что производная $(n+1)$ -го порядка $f_R^{(n+1)}(x)$ является в то же время производной n -го порядка произведения $f_R(x) f_R(x)$. Исследование процесса убывания остаточного члена данного ряда при $n \rightarrow \infty$ предусматривает в этом случае рассмотрение двух таблиц неограниченно наращиваемых размеров. Эти таблицы содержат строки соответственно

$$\Psi_{1n}^0 \quad \Psi_{1n}^1 \quad \mathbf{K} \Psi_{1n}^k \quad \mathbf{K} \Psi_{1n}^n, \quad \Psi_{2n}^0 \quad \Psi_{2n}^1 \quad \mathbf{K} \Psi_{2n}^j \quad \mathbf{K} \Psi_{2n}^n;$$

где $\Psi_{1n}^k = z_n C_n^k$, $\Psi_{2n}^j = z_n C_n^j$, $z_n = h^{n+1} / (n+1)!$; $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $j = n - k$.

Биномиальные коэффициенты C_n^k , C_n^j соответствуют структуре формулы Лейбница, которая применяется для получения производных произведения $f_R(x)f_R(x)$.

Из первой наращиваемой таблицы выделяется и ставится в соответствие любому неограниченному $k \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) последовательность вида (Y_n^k) , формируемая с поддержанием фиксированной разности $n - k = j_F$. Из второй наращиваемой таблицы выделяется последовательность вида (Y_n^j) , соответствующая любому ограниченному, фиксированному значению $n - j = k_F$ ($n \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$). Далее следует убедиться в существовании нулевых пределов данных последовательностей.

Практическая малость остатка r_{fR} и соответствующее значение индекса n выявляются из условия непревышения (на интервале I_x) заданного порога расхождения величин f_R и аппроксимирующего многочлена Тейлора, который входит в соотношение (9). Объединяя постоянные коэффициенты при одинаковых степенях аргумента в соотношении (9) операциями сложения, получаем следующее выражение полинома, аппроксимирующего функцию $f_R(x)$ на интервале I_x (индексы $i = 0, 1, 2, \dots, n$):

$$f_{aR}(x) = \sum_{m=0}^n h^m f_R^{(m)}(x_0) / m! = \sum_{i=0}^n a_{Ri} x^i, \quad (10)$$

где a_i — приведенные коэффициенты при степенях аргумента x .

Второе слагаемое числителя из (4) представляется интегралом

$$\int_{x_0}^x q(x) (I / I_0) f_{aR}(x) dx = I_0^{-1} \int_{x_0}^x \left(\sin \varpi x \sum_{i=0}^n a_{Ri} x^i \right) dx = (I_0 \varpi)^{-1} \int_{c_0}^c \left(\sin c \sum_{i=0}^n a_{Ri} c^i \right) dx, \quad (11)$$

где $c = \tilde{\omega}x$, $c_0 = \tilde{\omega}x_0$, $a_{Ri} = a_{Ri} / \tilde{\omega}^i$.

Интеграл (11) берется с учетом следующих известных соотношений [7]:

$$\int c^i \sin c \, dc = -c^i \cos c + i \int c^{i-1} \cos c \, dc; \quad (12)$$

$$\int c^i \cos c \, dc = c^i \sin c - i \int c^{i-1} \sin c \, dc. \quad (13)$$

Проведение конечного числа рекуррентных действий (12)–(13) дает возможность представить искомое решение дифференциального уравнения (1) следующим образом:

$$y = (I f_{aR}(x))^{-1} \left(y_0 I_0 + \varpi^{-1} \sum_{i=0}^n x^i (b_i^S \sin \varpi x + b_i^C \cos \varpi x) \right);$$

$$b_i^S \sin \varpi x + b_i^C \cos \varpi x = b_i \sin(\varpi x + j_i),$$

где величина $f_{aR}(x)$ определяется выражением (10).

Параметры вида b_i^S , b_i^C , b_i , j_i принимают конкретные значения после проведения процедур (12)–(13) применительно к каждому степенному компоненту подынтегральной суммы из выражения (11) и приведения подобных членов.

Получение математического описания размерной физической реакции $i(t)$ рассмотренной двухэлементной цепи (рис. 1) на общее синусоидальное воздействие в динамическом режиме как решения исходных уравнений (2)–(3) производится путем освобождения от выполненного прежде нормирования значений найденной безразмерной величины y и её аргумента x . Для упрощения подынтегрального выражения в формируемом решении дифференциального уравнения первого порядка с переменным коэффициентом перед производной искомой функции, выделение отношения (I'/I) как аддитивной части коэффициента перед самой искомой функцией может осуществляться в качестве специального технического приема. Например, пусть имеется дифференциальное уравнение, аналогичное (1), применительно к которому полагаем $r = r(x)$ произвольным многочленом.

Уже специально выделив из многочлена r величину $r_L = I'$ (другой составной частью r как суммы становится многочлен $r_R = r - r_L$), можно считать, что общее решение рассматриваемого уравнения представляется соотношениями (4)–(6). Делитель из правой части (1) — величина $I(x)$ в подынтегральном выражении числителя общего решения — подвергается здесь сокращению рассмотренным образом, и поэтому интегрирование данного выражения при на-

личии соответствующей аппроксимации $f_{aR}(x)$ осуществляется проще сравнительно со случаем присутствия в нем делителя l .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никонов А. И. О задачах определения компонентов – величин операционно-параметрических моделей // Успехи современного естествознания, 2004. № 8. С. 123-124.
2. Никонов А. И. Виды компонентов параметрических схем-моделей действия технических объектов // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Техн. науки, 2005. Вып. 32. С. 63–68.
3. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов. М.: Наука, 1998. 232 с.
4. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения: Метод. пособие. Л.: ЛГУ, 1963. 416 с.
5. Бронштейн И. Н. Семендяев К. А. Справочник по математике. М.: Наука, 1981. 720 с.
6. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. для вузов. М.: Наука, 1984. 432 с.
7. Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П. Таблицы неопределенных интегралов. М.: Наука, 1986. 192 с.

Поступила 23.08.2006 г.

УДК 519.1

И. Х. Найманова, А. М. Кочкаров

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА

Рассматривается задача распознавания предфрактального графа с непересекающимися старыми ребрами, при этом в качестве затравки выступает регулярный n -вершинный граф степени $s = n - 2$.

Задача распознавания объектов и явлений является актуальной задачей искусственного интеллекта и многих задач в военной области, в связи с этим вызывает интерес ее постановка и исследование.

В данной работе рассматривается задача распознавания предфрактального графа (см. [1]) $G = (V, E)$ с непересекающимися старыми ребрами, когда в качестве затравки $H = (W, Q)$ выступает регулярный n -вершинный граф степени $s = n - 2$.

Пусть множество Q состоит из $q = |Q| = \frac{n(n-2)}{2}$ ребер. Найдем количество ребер данного предфрактального графа

$$m(n, q, L) = q(1 + n + n^2 + \dots + n^{L-1}) = \frac{n(n-2)}{2} \frac{n^L - 1}{n - 1}. \quad (1)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть граф $G = (V, E)$ является таким (n, L) -графом, в котором старые ребра не пересекаются и его затравка $H = (W, Q)$ является однородным графом степени $\deg H = n - 2$. Тогда его множество вершин V разбивается на два подмножества V_1 и V_2 , где V_1 составляют вершины, степень которых равна $n - 1$, а V_2 составляют вершины, степень которых равна $n - 2$. При этом мощности этих множеств определяются соотношениями:

$$|V_1| = \frac{n(n-2)(n^{L-1} - 1)}{n - 1}, \quad (2)$$

$$|V_2| = \frac{n^L - 1}{n - 1} + n - 1. \quad (3)$$

Доказательство. По условию теоремы старые ребра в графе G не пересекаются. Это значит, что какая-либо из вершин $v \in V$ либо инцидентна одному старому ребру, либо не инци-