Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Тянь, Структурное представление обратного оператора в банаховом пространстве, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 1(), 197–200

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:41:06

Теория управления

УДК 681.5:681.3

В. К. Тянь

СТРУКТУРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрена задача построения обратного оператора уравнения $Az = u$ ($u \in U, z \in F$; U, F — метрические пространства). Предложен алгоритм решения обратных задач, базирующийся на структурном представлении обратных операторов в виде периодической структуры. Сформулированы необходимые и достаточные условия фундаментальности периодической структуры и показано, что при его выполнении оператор периодической структуры сходится к обратному оператору.

Как известно, многие задачи естествознания описываются операторным уравнением вида

$$Az = u, \quad u \in U, \quad z \in F, \quad (1)$$

где U, F — метрические пространства с соответствующими метриками $r_u(u_1, u_2)$ и $r_F(z_1, z_2)$; A — некоторый непрерывный оператор. Уравнение (1) фактически описывает причинно-следственную связь, а именно, u есть следствие, обусловленное действием оператора A на причину z . При решении обратных задач, т.е. нахождение причины z по ее следствию u , возникают ряд серьезных математических проблем [1–3], центральной из которых является то, что обратный оператор A^{-1} , заданный на всей области определения, не является непрерывным. Это стало причиной формулировки Ж. Адамаром понятия корректной постановки задач математической физики.

Фактически, любая практическая задача, связанная с экспериментальным получением исходных данных, не укладывается в рамки корректной постановки задач [2, 3]. Известен неоценимый вклад отечественных ученых в решение обратных задач. А. Н. Тихонов сформулировал понятие условно корректной постановки, из которой следуют следующие утверждения. Пусть u_m — точное значение, а соответствующее точное решение операторного уравнения $Az_m = u_m$ принадлежит компакту M . Тогда обратный оператор A^{-1} непрерывен на паре множеств: компакте M и его образе N , и для любого $u_d \in N$ приближенное решение z_d можно представить в виде

$$z_d = A^{-1}u_d. \quad (2)$$

Причем в метрике пространства U : $u_d \rightarrow u_m$ при $d \rightarrow 0$ ($r_u(u_m, u_d) \leq d$). Разработанные алгоритмы решения задач в условно корректной постановке по А. Н. Тихонову широко используются на практике при решении важнейших задач, которые не были решены на базе существовавшего математического инструментария. Перечислим некоторые из этих задач [2, 3]. Это обратные задачи электромагнитных методов геофизики, гравиметрии и магнитометрии, астрофизики, обработки фотоизображений, электродинамики и др. Актуальность решения перечисленных задач неоспорима, что подтверждает неоценимый вклад А. Н. Тихонова и его коллег в теорию и практику решения некорректных и обратных задач.

Как отмечается в [2], характерным признаком обратных задач является их физическая нереализуемость. В некоторых приложениях важен именно этот момент. Например, в теории управления решение ряда задач требует именно выработки некоторых управляющих сигналов в реальном времени, которые являются решением обратной задачи операторного уравнения (1). Эти задачи относятся к разделу динамической компенсации [4, 5]. Это позволило бы на качественно новом уровне реализовать компенсационные системы и синтезировать адаптивные системы, проводить идентификацию в реальном темпе времени и другие важные задачи управления, т.е. реализовать принцип динамической компенсации, с которым в настоящее время связаны некоторые нерешенные проблемы.

Реализация оптимальных нелинейных систем при случайных воздействиях также связан с проблемами принципа динамической компенсации. Аналогичная проблема возникает при использовании метода проекционно-матричных операторов корреляционного анализа стационар-

ных и нестационарных линейных систем автоматического управления. Это связано с усреднением стохастических матричных операторов, связывающих проекционные характеристики входного и выходного сигналов и определенные на базе матричных операторов интегрирования и умножения [4].

Упомянутые выше задачи, а также ряд других задач, по своей сути относятся к классу некорректных задач и их решение требует общесфункционального подхода. В данной работе предлагается алгоритм решения обратных задач, базирующийся на структурном представлении обратных операторов в виде периодической структуры, схематически представленной на рисунке.

Структурное представление обратного оператора A^{-1}

Здесь I — тождественный оператор, A — некоторый непрерывный оператор, отображающий множество F в U .

Введем следующие понятия.

Определение 1. Оператор A_0 называется стабилизирующим оператором, если для заданного прямого оператора A выполняется условие $\|I - AA_0\| < 1$.

Определение 2. Структура, представленная на рисунке называется фундаментальной, если последовательность операторов, описывающая данную структуру, при неограниченном увеличении количества периодических ячеек данной структуры является фундаментальной последовательностью в соответствующем пространстве.

Пусть в (1) U, F — банаховы пространства.

Лемма. Для того, чтобы представленная на рисунке периодическая структура была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы оператор A_0 являлся стабилизирующим оператором.

Доказательство. Данная структура, содержащая k периодических ячеек, описывается следующей системой операторных уравнений:

$$\Delta U_0 = A_0 u; \Delta_1 = [I - AA_0]u; \Delta U_1 = A_0 \Delta_1; \Delta_2 = I\Delta_1 - A\Delta U_1; \Delta U_2 = A_0 \Delta_2;$$

$$\dots$$

$$\Delta_k = I\Delta_{k-1} - A\Delta U_{k-1}; \Delta U_k = A_0 \Delta_k. \quad (3)$$

Из системы (3) нетрудно получить операторное выражение для структуры длиной k :

$$z_k = A_0 \left[I + \sum_{i=1}^k (I - AA_0)^i \right] u. \quad (4)$$

Тогда оператор, описывающий представленную на рисунке периодическую структуру длиной k , имеет вид

$$A_k = A_0 \left[I + \sum_{i=1}^k (I - AA_0)^i \right]. \quad (5)$$

Структура с $(k+1)$ ячейкой описывается следующим оператором:

$$A_{k+1} = A_0 \left[I + \sum_{i=1}^{k+1} (I - AA_0)^i \right]. \quad (6)$$

Найдем разность операторов

$$\Delta A_k = A_{k+1} - A_k. \quad (7)$$

Подставив (5), (6) в (7), после преобразований получим

$$\Delta A_k = (I - AA_0)^{k+1}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что необходимым и достаточным условием фундаментальности периодической структуры, представленной на рисунке, является условие

$$\|I - AA_0\| < 1. \quad (9)$$

Таким образом, лемма доказана.

Теорема. При выполнении условия фундаментальности периодической структуры (9) фундаментальная структура является ограниченной, а оператор периодической структуры сходится к обратному оператору A^{-1} .

Доказательство. На основании (5) запишем $AA_k = AA_0 \left[I + \sum_{i=1}^k (I - AA_0)^i \right]$ или

$$AA_k = AA_0 \sum_{i=0}^k (I - AA_0)^i. \quad (10)$$

К произведению операторов AA_0 прибавим и отнимем тождественный оператор I , получим

$$AA_k = \sum_{i=0}^k \left[(I - AA_0)^i - (I - AA_0)^{i+1} \right]. \quad (11)$$

После суммирования окончательно имеем

$$AA_k = I - [I - AA_0]^{k+1}. \quad (12)$$

При соблюдении условия (9) выполняются следующие неравенства [7]:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \| [I - AA_0]^i \| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \| I - AA_0 \|^i < \infty. \quad (13)$$

На основании полноты рассматриваемых пространств и сходимости ряда (13) имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \| [I - AA_0]^i \|, \quad (14)$$

из (12) следует, что оператор AA_k является ограниченным. Так как оператор A является ограниченным, то, следовательно, оператор A_k является так же ограниченным при любом значении k .

Таким образом, первая часть теоремы об ограниченности фундаментальной структуры доказана. Перейдем к доказательству второй части теоремы. Предел суммы (12) с учетом (9) примет вид: $\lim AA_k = I$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $A_{\infty} = A^{-1}$.

Что и требовалось доказать.

Анализ периодической структуры, представленной на рисунке, показывает, что для получения приближенного значения обратного оператора использован прямой оператор. А это дает возможность построения физически реализуемого обратного оператора. Полученные результаты могут использоваться во многих задачах теории управления и позволяют синтезировать системы управления, работающие в реальном масштабе времени. Эффективность периодических структур продемонстрирована в теории управления и в ряде других работ [8–11].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1979. 224 с.
2. Некорректные задачи естествознания / Под ред. А. Н. Тихонова, А. В. Гончарского. М.: МГУ, 1987. 304 с.
3. Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.
4. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.2. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егунова. М.: МГТУ, 2004. 640 с.

5. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974. 642 с.
6. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 547 с.
8. Рапопорт Э. Я., Тян В. К. Достижение заданной инвариантности в стохастических системах комбинированного управления / Куйб. политех. ин-т. Деп. В ВИНТИ 20.06.89, № 4089-В89. 9 с.
9. Тян В. К. Решение интегрального уравнения первого рода типа свертки в некорректных задачах теории управления // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Техн. науки, 2006. Вып. 40. С. 50–56.
10. Тян В. К. Теория периодических структур в некорректных задачах синтеза инвариантных и автономных систем управления // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Техн. науки, 2006. Вып. 41. С. 47–54.
11. Тян В. К. Структурное представление решения системы линейных алгебраических уравнений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки, 2006. Вып. 43. С. 158–162.

Поступила 16.08.2006 г.

Письмо в редакцию

А. Ф. Заусаев

Самарский государственный технический университет

В статье «Теория движения N материальных тел, основанная на новом принципе взаимодействия», опубликованной в Вестнике Самарского государственного технического университета (Серия «Физико–математические науки», выпуск 43, 2006) на стр. 135 обнаружены опечатки.

Формулы (18) должны иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 X}{dt^2} &= \sum_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)} + \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\
 \frac{d^2 Y}{dt^2} &= \sum_i \left(\frac{Y_i - Y}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)} + \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\
 \frac{d^2 Z}{dt^2} &= \sum_i \left(\frac{Z_i - Z}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)} + \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Поступила 10.09.2006 г.