Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Сеницкий, К вопросу интегрируемости неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющей приложение в динамической теории упругости, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 87–93

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:45:46

УДК 517.942:539.3

К ВОПРОСУ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИМЕЮЩЕЙ ПРИЛОЖЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ю. Э. Сеницкий

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mail: sgasu@sgasu.smr.ru

Показана возможность построения нового точного решения системы двух обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами достаточно общего вида, которая определяет собственные функции начально-краевой осесимметричной динамической задачи теории упругости для неоднородного анизотропного цилиндра в процедуре метода конечных интегральных преобразований. Рассмотрен частный случай, соответствующий однородному анизотропному цилиндру. В процессе исследования использовалось преобразование переменных в сочетании с методом факторизации и введением порождающих дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: неавтономная система ОДУ, динамическая задача теории упругости, анизотропный цилиндр.

Для анизотропного неоднородного цилиндра упругие постоянные a_{mk}^0 являются функциями радиальной координаты x , то есть $a_{mk}^0 = a_{mk}f(x)$ [1]. Здесь a_{mk} — соответствующие постоянные однородного материала, а $f(x)$ — функция неоднородности. При динамическом анализе осесимметричного напряжённо-деформированного состояния кругового толстостенного короткого неоднородного анизотропного цилиндра структурным методом конечных интегральных преобразований [1] задача сводится к исследованию следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений для компонентов вектор-функции ядра $G_1(\lambda_{in}X)$, $G_2(\lambda_{in}X)$ преобразования:

$$\begin{aligned} G''_1 + \left[F(x) + \frac{1}{x} \right] G'_1 + \left[\frac{a_{12}}{a_{11}} F(x) \frac{1}{x} - \frac{a_{22}}{a_{11}} \frac{1}{x^2} \right] G_1 - \frac{a_{55}}{a_{11}} \alpha_n^2 G_1 \mp \\ \mp \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{11}} \alpha_n G'_2 \mp \left[\frac{a_{13}}{a_{11}} F(x) + \frac{a_{13} - a_{23}}{a_{11}} \frac{1}{x} \right] \alpha_n G_2 + \lambda_{in}^2 G_1 = 0; \\ G''_2 + \left[F(x) + \frac{1}{x} \right] G'_2 - \frac{a_{33}}{a_{55}} \alpha_n^2 G_2 \pm \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{55}} \alpha_n G'_1 \pm \\ \pm \left[F(x) + \frac{a_{23} + a_{55}}{a_{55}} \frac{1}{x} \right] \alpha_n G_1 + \lambda_{in} \frac{a_{11}}{a_{55}} G_2 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $G_1, G_2 \in C_I^2$ — искомые функции; $x \in I(a, b)$ — открытый интервал вещественной оси; λ_{in} — положительные параметры, образующие счётное множество ($i \in \mathbb{N}$); $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$, $l = \text{const}$, $n \in \mathbb{N}$; штрих означает производные.

Сеницкий Юрий Эдуардович — зав. кафедрой сопротивления материалов и строительной механики Самарского государственного архитектурно-строительного университета; д.т.н., профессор.

Верхние и нижние знаки соответствуют двум вариантам смешанных краевых условий, задаваемых на торцах цилиндра:

$$F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad (2)$$

Очевидно, что в общем случае для произвольной функции $F(x)$ система (1) не интегрируется. Ниже рассмотрим возможность построения решения системы уравнений (1) и определим те условия, при которых она интегрируется.

Пусть выполняются два функциональных равенства:

$$a_{13}F(x) + (a_{13} - a_{23})\frac{1}{x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{a_{11}}\left[a_{12}F(x)\frac{1}{x} - a_{22}\frac{1}{x^2}\right] = \left[F(x) + \frac{1}{x}\right]', \quad (4)$$

из которых с учётом (2) немедленно следует, что

$$F(x) = \frac{k}{x}, \quad f(x) = Ax^k, \quad k = \frac{a_{23}}{a_{13}} - 1 \quad (5)$$

и такое соотношение между упругими константами материала:

$$\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{22} + a_{12}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}. \quad (6)$$

Без ограничения общности постоянную A можно при этом считать равной единице: $A = 1$. Имея в виду (3) и (4), систему дифференциальных уравнений можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} G_1'' + \left[F(x) + \frac{1}{x}\right]G_1' + \left[F(x) + \frac{1}{x}\right]'G_1 - \frac{a_{55}}{a_{11}}\alpha_n^2 G_1 \mp \\ \mp \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{11}}\alpha_n G_2' + \lambda_{in}^2 G_1 = 0, \\ G_2'' + \left[F(x) + \frac{1}{x}\right]G_2' - \frac{a_{33}}{a_{55}}\alpha_n^2 G_2 \pm \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{55}}\alpha_n G_1' \pm \\ \pm \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{55}}\left[F(x) + \frac{1}{x}\right]\alpha_n G_1 + \lambda_{in}^2 \frac{a_{11}}{a_{55}}G_2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Если продифференцировать по x второе уравнение (7) и ввести новую функцию $\psi(\lambda_{in}x)$ по формуле

$$\psi(\lambda_{in}x) = G_2'(\lambda_{in}x), \quad (8)$$

то система дифференциальных уравнений (7) записывается в виде

$$\begin{aligned} G_1'' + \left[F(x) + \frac{1}{x}\right]G_1' + \left[F(x) + \frac{1}{x}\right]'G_1 - \frac{a_{55}}{a_{11}}\alpha_n^2 G_1 \mp \\ \mp \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{11}}\alpha_n \psi + \lambda_{in}^2 G_1 = 0, \\ \psi'' + \left[F(x) + \frac{1}{x}\right]\psi' + \left[F(x) + \frac{1}{x}\right]'\psi - \frac{a_{33}}{a_{55}}\alpha_n^2 \psi \pm \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{55}}\alpha_n \times \\ \times \left\{G_1'' + \left[F(x) + \frac{1}{x}\right]G_1' + \left[F(x) + \frac{1}{x}\right]'G_1\right\} + \lambda_{in}^2 \frac{a_{11}}{a_{55}}\psi = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Введём дифференциальный оператор

$$\nabla_F^2(\cdot) = \frac{d^2}{dx^2}(\cdot) + \left[F(x) + \frac{1}{x}\right] \frac{d}{dx}(\cdot) + \left[F(x) + \frac{1}{x}\right]'(\cdot), \quad (10)$$

с учётом которого система уравнений (9) запишется в виде

$$\begin{aligned} \nabla_F^2 G_1 - \frac{a_{55}}{a_{11}} \alpha_n^2 G_1 \mp \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{11}} \alpha_n \psi + \lambda_{in}^2 G_1 &= 0, \\ \nabla_F^2 \psi - \frac{a_{33}}{a_{55}} \alpha_n^2 \psi \pm \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{55}} \alpha_n \nabla_F^2 G_1 + \lambda_{in}^2 \frac{a_{11}}{a_{55}} \psi &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражаем из первого уравнения (11) функцию ψ и действуем затем на обе части полученного равенства оператором (10). После подстановки соотношений для ψ и $\nabla_F^2 \psi$ во второе уравнение (11) в результате приходим к такому разрешающему дифференциальному уравнению IV-того порядка:

$$\nabla_F^4 G_1 + b_{in} \nabla_F^2 G_1 + c_{in} G_1 = 0. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_{in} &= \left(1 + \frac{a_{11}}{a_{55}}\right) \lambda_{in}^2 + \frac{a_{13}^2 + 2a_{13}a_{55} - a_{11}a_{33}}{a_{11}a_{55}} \alpha_n^2, \\ c_{in} &= \frac{a_{11}}{a_{55}} \lambda_{in}^4 - \frac{a_{33} + a_{55}}{a_{55}} \alpha_n^2 \lambda_{in}^2 + \frac{a_{33}}{a_{11}} \alpha_n^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Введём порождающие дифференциальные уравнения II-го порядка:

$$\nabla_F^2 G_1 = \pm \xi_{in}^2 G_1. \quad (14)$$

Тогда, действуя на обе части (14) оператором ∇_F^2 , находим

$$\nabla_F^4 G_1 = \pm \xi_{in}^2 \nabla_F^2 G_1 = \xi_{in}^4 G_1. \quad (15)$$

Подстановка выражений (14) и (15) в (12) приводит к двум биквадратным уравнениям для определения параметров ξ_{in} . Имеем

$$\xi_{in}^4 \pm b_{in} \xi_{in}^2 + c_{in} = 0.$$

Соответственно,

$$\xi_{in}^{(1)} = \left[\frac{b_{in}}{2} + \left(\frac{b_{in}^2}{4} - c_{in} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \xi_{in}^{(2)} = \left[-\frac{b_{in}}{2} + \left(\frac{b_{in}^2}{4} - c_{in} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Принимая во внимание соотношения (10) и (5), порождающие дифференциальные уравнения (14) записываем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 G_1^{(1)}}{dx^2} + \frac{k+1}{x} \frac{dG_1^{(1)}}{dx} + \left[\left(\xi_{in}^{(1)} \right)^2 - \frac{k+1}{x} \right] G_1^{(1)} &= 0, \\ \frac{d^2 G_1^{(2)}}{dx^2} + \frac{k+1}{x} \frac{dG_1^{(2)}}{dx} - \left[\left(\xi_{in}^{(2)} \right)^2 + \frac{k+1}{x} \right] G_1^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Заменой функции и независимой переменной по формулам

$$G_1^{(1,2)}(\lambda_{in}x) = x^{-\frac{k}{2}} U^{(1,2)}(\xi_{in}x), \quad z = \xi_{in}x \quad (18)$$

уравнения (17) приводятся к обычному и видоизмененному уравнениям Бесселя. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U^{(1)}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dU^{(1)}}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) U^{(1)} &= 0, \\ \frac{d^2 U^{(2)}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dU^{(2)}}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) U^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\nu = \frac{k}{2} + 1$.

Общее решение уравнений (19) записывается следующим образом:

$$U^{(1)}(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z), \quad U^{(2)}(z) = C_3 I_\nu(z) + C_4 K_\nu(z). \quad (20)$$

Здесь $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — обычные и модифицированные функции Бесселя порядка ν ; C_1 , C_2 , C_3 , C_4 — произвольные постоянные. Имея в виду равенства (18), (16), а также (20), общее решение линейного дифференциального уравнения (12) представим в виде суммы решений $G_1^{(1)}$ и $G_1^{(2)}$, то есть

$$G_1(\lambda_{in}x) = x^{-\frac{k}{2}} \left[C_1 J_\nu(\xi_{in}^{(1)}x) + C_2 Y_\nu(\xi_{in}^{(1)}x) + C_3 I_\nu(\xi_{in}^{(2)}x) + C_4 K_\nu(\xi_{in}^{(2)}x) \right]. \quad (21)$$

Из первого уравнения (11) с учётом (14) и (21) следует

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{a_{11}}{a_{13} + a_{55}} \alpha_n^{-1} \left(\xi_{in}^2 \mp \frac{a_{55}}{a_{11}} \alpha_n^2 \pm \lambda_{in}^2 \right) G_1 = \\ &= \beta_{in}^{(1)} x^{-\frac{k}{2}} \left[C_1 J_\nu(\xi_{in}^{(1)}x) + C_2 Y_\nu(\xi_{in}^{(1)}x) \right] + \\ &\quad + \beta_{in}^{(2)} r^{-\frac{k}{2}} \left[C_3 I_\nu(\xi_{in}^{(2)}x) + C_4 K_\nu(\xi_{in}^{(2)}x) \right], \end{aligned}$$

где

$$\beta_{in}^{(j)} = \frac{a_{11}}{a_{13} + a_{55}} \alpha^{-1} \left[(\xi_{in}^{(j)})^2 \mp \frac{a_{55}}{a_{11}} \alpha_n^2 \pm \lambda_{in}^2 \right], \quad j = 1, 2.$$

Принимая во внимание соотношение (8), определяем вторую компоненту G_2 :

$$\begin{aligned} G_2(\lambda_{in}x) &= \beta_{in}^{(1)} \int x^{-\frac{k}{2}} \left[C_1 J_\nu(\xi_{in}^{(1)}x) + C_2 Y_\nu(\xi_{in}^{(1)}x) \right] dx + \\ &\quad + \beta_{in}^{(2)} \int x^{-\frac{k}{2}} \left[C_3 I_\nu(\xi_{in}^{(2)}x) + C_4 K_\nu(\xi_{in}^{(2)}x) \right] dx. \end{aligned} \quad (22)$$

В выражении (22) содержатся такие квадратуры [2]:

$$\int y^{-\frac{k}{2}} Z_{\frac{k}{2}+1}(y) dy = \int y^{-\nu+1} Z_\nu(y) dy = -y^{-\nu+1} Z_{\nu-1}(y). \quad (23)$$

Здесь $Z_\nu(y)$ — соответствующие функции Бесселя порядка ν .

Таким образом, равенства (21), (22) представляют точное (при условиях (3), (4)) решение системы дифференциальных уравнений (1). Интересно отметить, что оно справедливо для степенного закона неоднородности $f(x)$ (5) и соотношения (6) для упругих постоянных материала цилиндра.

В случае, когда

$$a_{13} = a_{23}, \quad (24)$$

из равенства (6) следует, что

$$a_{11} = a_{22},$$

и построенное решение оказывается справедливым для однородного материала ($k = 0$), у которого независимыми являются пять упругих констант анизотропии.

Частный случай. Рассмотрим подробнее отмеченный выше случай $k = 0$ однородного анизотропного цилиндра:

$$f(x) = 1, \quad F(x) = 0.$$

Система дифференциальных уравнений при этих условиях принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}(xG_1')' - \frac{a_{22}}{a_{11}} \frac{1}{x^2} G_1 - \frac{a_{55}}{a_{11}} \alpha_n^2 G_1 \mp \\ \mp \alpha_n \left[\frac{a_{13} + a_{55}}{a_{11}} G_2' + \frac{a_{13} - a_{23}}{a_{11}} \frac{1}{x} G_2 \right] + \lambda_{in}^2 G_1 = 0, \\ \frac{1}{x}(xG_2')' - \frac{a_{33}}{a_{55}} \alpha_n^2 G_2 \pm \\ \pm \alpha_n \left[\frac{a_{13} + a_{55}}{a_{55}} G_1' + \frac{a_{23} - a_{55}}{a_{55}} \frac{1}{x} G_1 \right] + \lambda_{in}^2 \frac{a_{11}}{a_{55}} G_2 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Общее решение системы (25) представляют равенства (21)–(23) при $k = 0$. Полагаем, что это решение может быть получено независимо от предыдущего, если воспользоваться методом факторизации. Действительно, имея в виду, что $a_{13} = a_{23}$, выражаем G_2' из первого уравнения (25) и подставляем это соотношение во второе равенство (25). Затем, воспользовавшись этим уравнением, выражаем опять из него G_2 , после подстановки которого в первое равенство (25) окончательно имеем:

$$\begin{aligned} G_1^{IV} + \frac{2}{x} G_1''' + \left(b_{in} - \frac{2+s}{x^2} \right) G_1'' + \frac{1}{x} \left(b_{in} + \frac{3s}{x^2} \right) G_1' - \\ - \left(c_{in}^2 + \frac{h_{in}}{x^2} + \frac{3s}{x^4} \right) G_1 = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь b_{in} , c_{in} определяются по формулам (13), а

$$h_{in} = -b_{in} + \lambda_{in}^2 (1-s) \frac{a_{11}}{a_{55}} - \alpha_{in}^2 (1-s) \frac{a_{33}}{a_{55}}, \quad s = \frac{a_{22}}{a_{11}}.$$

Если принять, как и прежде в (24), что

$$s = 1, \quad a_{11} = a_{22},$$

то дифференциальное уравнение (26) допускает коммуникативную факторизацию:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \left(\xi_{in}^2 - \frac{1}{x^2} \right) \right] \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \left(\xi_{in}^{(2)} + \frac{1}{x} \right) \right] G_1 = 0. \quad (27)$$

Приравнявая нулю каждый сомножитель (27), получаем обычное и видоизмененное уравнения Бесселя, поэтому общий интеграл (27) можно представить в виде суммы:

$$G_1(\lambda_{in}x) = C_1 J_1(\xi_{in}^{(1)}x) + C_2 Y_1(\xi_{in}^{(1)}x) + C_3 I_1(\xi_{in}^{(2)}x) + C_4 K_1(\xi_{in}^{(2)}x). \quad (28)$$

Таким образом, (28) представляет частный случай решения (21) при $k = 0$.

Соответственно G_2 может быть представлено таким выражением:

$$G_2(\lambda_{in}x) = (\alpha_n d_{in})^{-1} \left\{ \xi_{in}^{(1)} \left(e_{in} - (\xi_{in}^{(1)})^2 \right) \left[C_1 J_0(\xi_{in}^{(1)}x) + C_2 Y_0(\xi_{in}^{(1)}x) \right] + \right. \\ \left. + \xi_{in}^{(2)} \left(e_{in} + (\xi_{in}^{(2)})^2 \right) \left[C_3 I_0(\xi_{in}^{(2)}x) + C_4 K_0(\xi_{in}^{(2)}x) \right] \right\},$$

где

$$d_{in} = \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{55}} \left(\lambda_{in}^2 - \frac{a_{33}}{a_{11}} \alpha_n^2 \right), \quad e_{in} = \lambda_{in}^2 + \frac{a_{13}(a_{13} + 2a_{55})}{a_{11}a_{55}} \alpha_n^2.$$

В заключение следует отметить, что в работе [3] получено точное решение системы дифференциальных уравнений (25) в случае, когда лишь $a_{13} = a_{23}$, а $a_{11} \neq a_{22}$, то есть независимыми являются шесть упругих констант анизотропного материала цилиндра.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сеницкий, Ю. Э. К проблеме интегрируемости осесимметричной краевой задачи динамики для неоднородного анизотропного конечного цилиндра [Текст] / Ю. Э. Сеницкий // Прикл. механика. — 1999. — Т. 35, № 4. — С. 19–29.
2. Коренев, Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций [Текст] / Б. Г. Коренев. — М.: Наука, 1974. — 287 с.
3. Сеницкий, Ю. Э. Динамическая задача теории упругости для анизотропного короткого цилиндра с учётом сил вязкого сопротивления [Текст] / Ю. Э. Сеницкий, В. В. Елишкин // Известия вузов. Строительство. — 2008. — № 3. — С. 29–41.

Поступила в редакцию 18/IV/2008;
в окончательном варианте — 12/VI/2008.

MSC: 74H99, 74E10

**ON INTEGRABILITY OF NONAUTONOMOUS SYSTEM OF
ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS APPLIED IN DYNAMIC
THEORY OF ELASTICITY**

Yu. É. Senitskiy

Samara State Academy of Architecture and Construction,
443001, Samara, Molodogvardeyskaya st., 194.

E-mail: sgasu@sgasu.smr.ru

The article demonstrates the possibility of generating a new and accurate solution of the system of two ordinary linear homogeneous differential second-order equations with variable general coefficients. It is essential that the integrability identifies its own functions of initial-boundary ax symmetric dynamic problem of theory of elasticity for anisotropic cylinder in the procedure of final integral transformational method. A specific case with the heterogeneous anisotropic cylinder is analyzed. During the research transformation of variable data was used together with the method of factorization and introduction of inducing differential equations.

Key words: *nonautonomous ODE systems, dynamic problem of elasticity theory, anisotropic cylinder.*

Original article submitted 18/IV/2008;
revision submitted 12/VI/2008.

Senitskiy Yuriy Éduardovich, Dr. Sci. (Tech.) Prof., Dept. of materials resistance and the building mechanics of Samara State Academy of Architecture and Construction.