Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Соколовская, Аппроксимация снизу систем дифференциальных включений некоторого вида с медленными и быстрыми переменными, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 6–17

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:41:53

Дифференциальные уравнения

УДК 517.928

Е. В. Соколовская

АППРОКСИМАЦИЯ СНИЗУ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НЕКОТОРОГО ВИДА С МЕДЛЕННЫМИ И БЫСТРЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Доказана теорема об аппроксимации снизу систем дифференциальных включений некоторого вида с медленными и быстрыми переменными и односторонне липшицевой правой частью. От отображения из правой части усреднённого дифференциального включения не требуется даже условия односторонней липшицевости по фазовым переменным.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных включений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in \mu F(t, x, y, \mu), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &\in G_0 + \mu G(t, x, y, \mu), & y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (1)$$

с медленными (x) и быстрыми (y) переменными. Здесь отображения F и G действуют из $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, a]$ в $Kv(\mathbb{R}^m)$, $Kv(\mathbb{R}^n)$ соответственно; $Kv(\mathbb{R}^p)$ — совокупность всех непустых выпуклых компактов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$ с евклидовой нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mu \in [0, a]$ ($a > 0$) — малый параметр; $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; $G_0 \in Kv(\mathbb{R}^n)$.

Наряду с исходной задачей (1) рассмотрим задачу Коши для более простого дифференциального включения (так называемую усреднённую задачу)

$$\dot{u} \in \mu F_0(t, u), \quad u(0) = x_0, \quad (2)$$

в которой отображение $F_0: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$.

Предполагается, что правые части исходной и усреднённой задач (1) и (2) связаны естественным для задач аппроксимации условием близости средних от отображений F и F_0 . Как и в случае исходной задачи общего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in \mu F(t, x, y, \mu), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &\in G(t, x, y, \mu), & y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3)$$

это условие близости средних от F и F_0 формулируется так [1]:

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \beta \left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} F_0(t, \xi_0) dt, \bigcup_{\eta} \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} F(t, \xi_0, \eta(t), 0) dt \right) = 0 \quad (4)$$

равномерно по (t_0, ξ_0, η_0) на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$; здесь $\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B)$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества A от множества B . Объединение берётся по всем решениям $\eta(t)$ дифференциального включения из порождающей задачи, получающейся из исходной при $\mu = 0$; для задачи (1) порождающая задача имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 0, & \xi(t_0) &= \xi_0, \\ \dot{\eta} &\in G_0, & \eta(t_0) &= \eta_0. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ([1, с. 25]). Говорят, что задача (2) *аппроксимирует снизу* исходную задачу (3), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что при всех $\mu \in (0, \mu_0]$ для любого решения $u_\mu(t)$ задачи (2) найдётся решение $(x_\mu(t), y_\mu(t))$ исходной задачи (3) такое, что для всех $t \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ справедливо неравенство $\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| < \varepsilon$.

Для задач (3) и (2) вопрос об аппроксимации снизу в предположении липшицевости отображений F , G и F_0 по (x, y) и по u соответственно был рассмотрен в работе [1].

В настоящей работе рассматривается вопрос об аппроксимации снизу задачи (1) задачей (2). При этом условие липшицевости по (x, y) отображений F и G из правых частей включений исходной задачи (1) заменяется на более слабое условие односторонней липшицевости (OSL) по x и по y соответственно. При выполнении этого и некоторых других условий на отображения F , G и F_0 как обычных для задач аппроксимации, так и новых, в работе доказана теорема об аппроксимации снизу исходной задачи (1) усреднённой задачей (2). При этом от отображения F_0 из правой части дифференциального включения усреднённой задачи не требуется выполнения даже условия односторонней липшицевости. Заметим, что в случае, когда односторонне липшицевы по (x, y) отображения F и G из задачи (3) не зависят от малого параметра μ , аппроксимация снизу задачи (3) усреднённой задачей (2) следует из результата работы [2], доказанного при некоторых дополнительных ограничениях на правую часть усреднённой задачи.

Условие OSL для многозначных отображений появилось впервые в работе [3]. В случае отображения $E: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ условие OSL формулируется так: существует локально интегрируемая по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функция $L_E: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и для любого $v \in E(t, x_1)$ найдётся элемент $w \in E(t, x_2)$, для которого выполняется неравенство:

$$\langle x_1 - x_2, v - w \rangle \leq L_E(t) \cdot \|x_1 - x_2\|^2.$$

При доказательстве основного результата настоящей работы существенно используется теорема Деймлинга о существовании решений задачи Коши для дифференциальных включений с полунепрерывной сверху правой частью. В ней идёт речь о задаче Коши

$$\dot{x} \in H(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (5)$$

в которой отображение H , определённое на $[0, T] \times D$ (D — замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$), имеет своими значениями замкнутые выпуклые множества в $\mathbb{R}^m$.

ТЕОРЕМА ([4, с. 58]). Пусть для H выполняется:

- а) $H(t, x)$ измеримо по t на $[0, T]$ для любого $x \in D$;
- б) $H(t, x)$ полунепрерывно сверху по x на D для любого $t \in [0, T]$;
- в) $\|H(t, x)\| \leq c(t) \cdot (1 + \|x\|)$ на $[0, T] \times D$ с интегрируемой по Лебегу на $[0, T]$ функцией $c(t)$;
- г) $H(t, x) \cap T_D(x) \neq \emptyset$ — непустое множество на $[0, T] \times D$, где $T_D(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\rho(x + \lambda y, D)}{\lambda} = 0 \right\}$

$\forall x \in D$.

Тогда задача (5) имеет решение на $[0, T]$ для любого $x_0 \in D$.

Среди принятых в работе обозначений отметим два: $LA(\mathbb{R}_+)$ и $\omega_E(\delta)$; остальные обозначения — общепринятые. $LA(\mathbb{R}_+)$ — класс локально интегрируемых на $\mathbb{R}_+$ по Лебегу функций $\lambda: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, для которых найдутся константы c_λ и Δ_λ такие, что при всех $\Delta > \Delta_\lambda$ для каждого

$t_0 \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство $\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda(t) dt \leq c_\lambda$. $\omega_E(\delta)$ — модуль непрерывности многозначного

отображения $E: \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$; напомним, что модуль непрерывности многозначного отображения определяется равенством $\omega_E(\delta) = \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m: \|x_1 - x_2\| \leq \delta} \alpha(E(x_1), E(x_2))$, где $\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$ —

отклонение по Хаусдорфу множества A от множества B .

2. Основной результат. Пусть для отображений F , G и F_0 из правых частей задач (1) и (2) выполнены следующие условия:

1) F , G и F_0 измеримы по t на $\mathbb{R}_+$ для любых $(x, y, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, a]$ и для любого $u \in \mathbb{R}^m$ соответственно;

2) F , G и F_0 интегрально ограничены функциями $\lambda_F(\cdot)$, $\lambda_G(\cdot)$, $\lambda_{F_0}(\cdot) \in LA(\mathbb{R}_+)$, т. е.

$$\|F(t, x, y, \mu)\| \leq \lambda_F(t), \quad \|G(t, x, y, \mu)\| \leq \lambda_G(t) \quad \forall (t, x, y, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, a],$$

$$\|F_0(t, u)\| \leq \lambda_{F_0}(t) \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m;$$

3) для F и F_0 выполняется условие близости средних (4);

4) модуль непрерывности $\omega_{F^\circ}(t, \delta)$ отображения $F^\circ(t, x, y) = F(t, x, y, 0)$ по (x, y) и модуль непрерывности $\omega_{F_0}(t, \delta)$ отображения $F_0(t, u)$ по u допускают следующие оценки:

$$\omega_{F^\circ}(t, \delta) \leq \sigma_F(t) \cdot \eta_F(t, \delta), \quad \omega_{F_0}(t, \delta) \leq \sigma_{F_0}(t) \cdot \eta_{F_0}(t, \delta)$$

с положительными функциями $\sigma_F(\cdot)$, $\sigma_{F_0}(\cdot) \in LA(\mathbb{R}_+)$ и неотрицательными функциями η_F , η_{F_0} , стремящимися к нулю при $\delta \rightarrow +0$ равномерно по t на $\mathbb{R}_+$;

5) для отображения $F(t, x, y, \mu)$ выполняется оценка

$$\alpha(F(t, x, y, \mu), F(t, x, y, 0)) \leq \sigma_F(t) \cdot v_F(t, x, y, \mu) \quad \forall (t, x, y, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, a]$$

с неотрицательной функцией v_F , стремящейся к нулю при $\mu \rightarrow 0$ равномерно по (t, x, y) на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$;

6) отображение G полунепрерывно сверху по (x, y) на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $\mu \in (0, a]$ и $t \in [0, \frac{1}{\mu}]$;

7) отображение F при каждом $\mu \in (0, a]$, $y \in \mathbb{R}^n$ — односторонне липшицево по x , причём существуют положительная функция $B(\mu)$, стремящаяся к нулю при $\mu \rightarrow 0$, и константа $A > 0$ такие, что $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall v \in F(t, x_1, y_1, \mu) \exists w \in F(t, x_2, y_2, \mu)$:

$$\langle x_1 - x_2, v - w \rangle \leq A \cdot \|x_1 - x_2\|^2 + B(\mu) \cdot \|y_1 - y_2\|^2;$$

8) отображение G при каждом $\mu \in (0, a]$, $x \in \mathbb{R}^m$ — односторонне липшицево по y , причём существуют константы $C > 0$, $D > 0$ такие, что $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall v \in G(t, x_1, y_1, \mu) \exists w \in G(t, x_2, y_2, \mu)$:

$$\langle y_1 - y_2, v - w \rangle \leq C \cdot \|x_1 - x_2\|^2 + D \cdot \|y_1 - y_2\|^2.$$

При этих предположениях доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть для F , G и F_0 выполняются условия 1)–8). Тогда усреднённая задача (2) аппроксимирует снизу исходную задачу (1).

Заметим, что выполнение для отображения F_0 перечисленных условий 1), 2), 4) обеспечивает, в силу теоремы Деймлинга [4], разрешимость на $[0, \frac{1}{\mu}]$ задачи (2) при каждом $\mu \in (0, a]$.

ПРИМЕР. В качестве исходной задачи (1) рассмотрим такую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in \mu F(t, x, y, \mu), & x(0) &= 0, \\ \dot{y} &\in [1, 2] + \mu G(t, x, y, \mu), & y(0) &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где отображения $F, G: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, a] \rightarrow Kv(\mathbb{R})$ определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} F(t, x, y, \mu) &= \mu \sin y + g(x) \cdot (\sin(t + \mu) + [-2, -1]), \\ G(t, x, y, \mu) &= \mu \sin x + g(y) \cdot [-1, 0] \end{aligned}$$

с функцией $g(x)$, задаваемой в виде

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

В качестве усреднённой задачи (2) возьмём следующую:

$$\dot{u} \in \mu F_0(u), \quad u(0) = 0 \tag{7}$$

с отображением $F_0: \mathbb{R} \rightarrow Kv(\mathbb{R})$, определяемым равенством

$$F_0(u) = g(u) \cdot [-2, -1].$$

Отображения F и G не липшицевы по (x, y) . Для F, G и F_0 выполнены все условия сформулированной выше теоремы. Поэтому усреднённая задача (7) аппроксимирует снизу исходную задачу (6).

При доказательстве основного результата работы понадобятся следующие леммы, доказываемые аналогично лемме 1 из [5].

ЛЕММА 1. Выполнение для отображения F условий 4), 5) теоремы равносильно выполнению для него условия:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \mu \in [0, a]: \|x_1 - x_2\| < \delta, \\ \|y_1 - y_2\| < \delta, \quad 0 \leq \mu < \delta \Rightarrow \alpha(F(t, x_1, y_1, \mu), F(t, x_2, y_2, 0)) < \varepsilon \cdot \sigma_F(t) \end{aligned} \tag{8}$$

с функцией $\sigma_F(t)$ из условия 4) теоремы.

ЛЕММА 2. Выполнение для F_0 условия 4) теоремы равносильно выполнению для него условия:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ : \|u_1 - u_2\| < \delta \Rightarrow \alpha(F_0(t, u_1), F_0(t, u_2)) < \varepsilon \cdot \sigma_{F_0}(t) \quad (9)$$

с положительной функцией $\sigma_{F_0}(\cdot) \in LA(\mathbb{R}_+)$ из условия 4) теоремы.

3. Доказательство теоремы. Доказательство проводится по определению аппроксимации снизу задачи (1) задачей (2), то есть состоит в проверке условия: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mu_0 > 0 \quad \forall \mu \in (0, \mu_0]$, для любого решения $u_\mu(t)$ задачи (2) найдётся решение $(x_\mu(t), y_\mu(t))$ исходной задачи (1) такое, что для всех $t \in [0, \frac{1}{\mu}]$ справедливо неравенство $\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| < \varepsilon$.

Сначала найдём константы k и Δ_0 так, что для любого $\Delta \geq \Delta_0$ и любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ выполняется

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_F(t) dt \leq k, \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_{F_0}(t) dt \leq k, \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_F(t) dt \leq k, \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_{F_0}(t) dt \leq k;$$

такие константы k и Δ_0 найдутся в силу того, что функции $\lambda_F(\cdot)$, $\lambda_{F_0}(\cdot)$, $\sigma_F(\cdot)$, $\sigma_{F_0}(\cdot) \in LA(\mathbb{R}_+)$.

Теперь возьмём произвольное $0 < \varepsilon < 1$. По нему найдём число $\delta_F(\varepsilon) > 0$ из выполнения для F условия (8) леммы 1. По этому же ε найдём число $\mu_1 > 0$ (из условия $B(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$). По числу

$$\gamma = \frac{1}{(1+k)} \min \left\{ \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2}, \varepsilon \right\}$$

найдем число $\delta_{F_0}(\gamma) > 0$ (из выполнения условия (9) из леммы 2 для отображения F_0). Возьмём число $N \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы

$$\frac{k}{N} < \min \left\{ \delta_{F_0}(\gamma), \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2}, \varepsilon \right\}.$$

По числу γ найдём число $\Delta_1(\gamma) > \Delta_0$ (из выполнения условия 3) о близости средних от F_0 и F).

После этого берём число $\mu_0 > 0$ настолько малым, чтобы

$$\mu_0 < \min \left\{ \frac{1}{\Delta_1(\gamma)N}, \delta_F(\varepsilon), \mu_1 \right\}.$$

Это μ_0 — искомое. Для доказательства этого возьмём произвольное $\mu \in (0, \mu_0]$ и произвольное решение $u_\mu(t)$ задачи (2). Разобьём $[0, \frac{1}{\mu}]$ точками $t_j = \frac{j}{\mu N}$ ($j = 0, 1, \dots, N$) на N частичных отрезков длиной $\Delta = \frac{1}{\mu N}$. Это $\Delta > \Delta_1(\gamma)$. Значения решения $u_\mu(t)$ в узлах сетки обозначим через u_j . Для решения $u_\mu(t)$ имеем

$$u_\mu(t) = x_0 + \mu \int_0^t v(s) ds,$$

где $v(s) \in F_0(s, u_\mu(s))$ — некоторый селектор.

По теореме об измеримом селекторе, на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$) найдётся селектор $v_j^1(t) \in F_0(t, u_j)$ такой, что

$$\|v(t) - v_j^1(t)\| = \rho(v(t), F_0(t, u_j)) \leq \beta(F_0(t, u_\mu(t)), F_0(t, u_j)) \leq \alpha(F_0(t, u_\mu(t)), F_0(t, u_j)).$$

Чтобы теперь использовать условие (9) из леммы 2 для F_0 , оценим сначала, насколько $u_\mu(t)$ отличается от u_j на $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$). Имеем для каждого $t \in [t_j, t_{j+1}]$:

$$\begin{aligned} \|u_\mu(t) - u_j\| &= \left\| x_0 + \mu \int_0^t v(s) ds - x_0 - \mu \int_0^{t_j} v(s) ds \right\| \leq \mu \int_{t_j}^t \|v(s)\| ds \leq \\ &\leq \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \|v(s)\| ds \leq \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_{F_0}(s) ds \leq \mu k \Delta = \frac{\mu k}{\mu N} = \frac{k}{N} < \delta_{F_0}(\gamma). \end{aligned}$$

Так как число $\delta_{F_0}(\gamma)$ выбиралось по числу γ из выполнения для F_0 условия (9) из леммы 2, то

$$\alpha(F_0(t, u_\mu(t)), F_0(t, u_j)) < \gamma \sigma_{F_0}(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = 0, 1, \dots, N-1).$$

Следовательно,

$$\|v(t) - v_j^1(t)\| < \gamma \sigma_{F_0}(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = 0, 1, \dots, N-1).$$

Теперь на первом частичном отрезке $[0, t_1]$ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 0, & \xi(0) &= x_0, \\ \dot{\eta} &\in G_0, & \eta(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{10}$$

Так как

$$\frac{1}{\Delta} \int_0^{t_1} v_0^1(t) dt \in \frac{1}{\Delta} \int_0^{t_1} F_0(t, u_0) dt,$$

то

$$\rho \left(\frac{1}{\Delta} \int_0^{t_1} v_0^1(t) dt, \bigcup_{\eta(t) \in Z(0, u_0, \eta_0)} \frac{1}{\Delta} \int_0^{t_1} F(t, u_0, \eta(t), 0) dt \right) < \gamma.$$

Здесь $Z(0, u_0, \eta_0)$ — множество решений на $[0, t_1]$ дифференциального включения из задачи (10). Следовательно, найдётся точка

$$a_0 \in \bigcup_{\eta(t) \in Z(0, u_0, \eta_0)} \frac{1}{\Delta} \int_0^{t_1} F(t, u_0, \eta(t), 0) dt,$$

расстояние от которой до точки $\frac{1}{\Delta} \int_0^{t_1} v_0^1(t) dt$ тоже меньше γ . Это значит, что найдётся решение $(u_0, \eta_0(t))$ задачи (10) на $[0, t_1]$ и селектор $v_0^2(t) \in F(t, u_0, \eta_0(t), 0)$ такой, что

$$\left\| \frac{1}{\Delta} \int_0^{t_1} v_0^1(t) dt - \frac{1}{\Delta} \int_0^{t_1} v_0^2(t) dt \right\| < \gamma.$$

Функция $\eta_0(t)$, как решение на $[0, t_1]$ дифференциального включения из задачи (10), представима в виде

$$\eta_0(t) = y_0 + \int_0^t \omega_0(s) ds,$$

где $\omega_0(t) \in G_0 \quad \forall t \in [0, t_1]$.

На следующем частичном отрезке $[t_1, t_2]$ рассматриваем такую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 0, & \xi(t_1) &= u_1, \\ \dot{\eta} &\in G_0, & \eta(t_1) &= \eta_0(t_1). \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично найдём на $[t_1, t_2]$ решение $(u_1, \eta_1(t))$ задачи (11) и селектор $v_1^2(t) \in F(t, u_1, \eta_1(t), 0)$ такой, что

$$\left\| \frac{1}{\Delta} \int_{t_1}^{t_2} v_1^1(t) dt - \frac{1}{\Delta} \int_{t_1}^{t_2} v_1^2(t) dt \right\| < \gamma.$$

Функция $\eta_1(t)$, как решение на $[t_1, t_2]$ дифференциального включения из задачи (11), представима в виде

$$\eta_1(t) = \eta_0(t_1) + \int_{t_1}^t \omega_1(s) ds = y_0 + \int_0^{t_1} \omega_0(s) ds + \int_{t_1}^t \omega_1(s) ds,$$

где $\omega_1(t) \in G_0 \ \forall t \in [t_1, t_2]$.

Аналогичные рассуждения проводим последовательно для каждого частичного отрезка. А именно, если на отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ найдено решение $(u_{j-1}, \eta_{j-1}(t))$ порождающей задачи

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 0, & \xi(t_{j-1}) &= u_{j-1}, \\ \dot{\eta} &\in G_0, & \eta(t_{j-1}) &= \eta_{j-2}(t_{j-1}), \end{aligned}$$

то на следующем частичном отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ рассматриваем такую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 0, & \xi(t_j) &= u_j, \\ \dot{\eta} &\in G_0, & \eta(t_j) &= \eta_{j-1}(t_j). \end{aligned} \quad (12)$$

Подобно задачам (10) и (11), для неё на $[t_j, t_{j+1}]$ найдётся решение $(u_j, \eta_j(t))$ и селектор $v_j^2(t) \in F(t, u_j, \eta_j(t), 0)$ такой, что

$$\left\| \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^1(t) dt - \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^2(t) dt \right\| < \gamma.$$

Заметим, что $\eta_j(t)$, как решение дифференциального включения из задачи (13), представима на $[t_j, t_{j+1}]$ в виде

$$\eta_j(t) = \eta_{j-1}(t_j) + \int_{t_j}^t \omega_j(s) ds = y_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_i(s) ds + \int_{t_j}^t \omega_j(s) ds,$$

где $\omega_j(t) \in G_0 \ \forall t \in [t_j, t_{j+1}]$.

Теперь введём на $[0, \frac{1}{\mu}]$ функции $v^2(t)$, $\omega(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ так:

$$v^2(t) = \begin{cases} v_j^2(t), & \text{если } t \in [t_j, t_{j+1}) \quad (j=0, 1, \dots, N-1), \\ v_{N-1}^2\left(\frac{1}{\mu}\right), & \text{если } t = \frac{1}{\mu}; \end{cases}$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_j(t), & \text{если } t \in [t_j, t_{j+1}) \quad (j=0, 1, \dots, N-1), \\ \omega_{N-1}\left(\frac{1}{\mu}\right), & \text{если } t = \frac{1}{\mu}; \end{cases}$$

$$a(t) = x_0 + \mu \int_0^t v^2(s) ds; \quad b(t) = y_0 + \int_0^t \omega(s) ds.$$

Очевидно, что для этих $t \in [t_j, t_{j+1}) \ \eta_j(t) = b(t) \ (j=0, 1, \dots, N-1)$.

Для этих функций почти всюду на отрезке $[0, \frac{1}{\mu}]$ имеют место оценки:

$$\begin{aligned} \rho(\dot{a}(t), \mu F(t, a(t), b(t), \mu)) &< \mu \varepsilon \sigma_F(t), \\ \rho(\dot{b}(t), G_0 + \mu G(t, a(t), b(t), \mu)) &< \mu \lambda_G(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Действительно, $\dot{a}(t) = \mu v^2(t)$ почти всюду на $[0, \frac{1}{\mu}]$. Если t содержится в $[t_j, t_{j+1}) \ (j=0, 1, \dots, N-1)$, то $v^2(t) = v_j^2(t)$ и, следовательно, $\dot{a}(t) = \mu v_j^2(t) \in \mu F(t, u_j, \eta_j(t), 0)$, а тогда

$$\begin{aligned} \rho(\dot{a}(t), \mu F(t, a(t), b(t), \mu)) &= \rho(\mu v_j^2(t), \mu F(t, a(t), b(t), \mu)) \leq \\ &\leq \beta(\mu F(t, u_j, \eta_j(t), 0), \mu F(t, a(t), b(t), \mu)) \leq \mu \alpha(F(t, u_j, \eta_j(t), 0), F(t, a(t), b(t), \mu)). \end{aligned} \quad (14)$$

Чтобы теперь использовать условие (8) из леммы 1 для F , оценим $\|u_j - a(t)\| \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$). Сначала оценим эту норму в узлах t_j ($j = 0, 1, \dots, N$) сетки. Имеем

$$\begin{aligned} \|u_j - a(t_j)\| &= \left\| x_0 + \mu \int_0^{t_j} v(t) dt - x_0 - \mu \int_0^{t_j} v^2(t) dt \right\| = \left\| \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(t) dt - \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^2(t) dt \right\| \leq \\ &\leq \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|v(t) - v^1(t)\| dt + \mu \sum_{i=0}^{j-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (v_i^1(t) - v_i^2(t)) dt \right\| \leq \mu \gamma \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma_{F_0}(t) dt + \mu j \Delta \gamma \leq \\ &\leq \mu \gamma k \Delta j + \mu j \Delta \gamma = \mu \gamma \Delta j (k+1) \leq \gamma (k+1). \end{aligned}$$

После этого имеем $\forall t \in [t_j, t_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$):

$$\begin{aligned} \|u_j - a(t)\| &\leq \|u_j - a(t_j)\| + \|a(t_j) - a(t)\| \leq \gamma(k+1) + \mu \int_{t_j}^t \|v_j^2(s)\| ds \leq \gamma(k+1) + \mu \int_{t_j}^t \lambda_F(s) ds \leq \\ &\leq \gamma(k+1) + \mu \Delta k = \gamma(k+1) + \frac{\mu k}{\mu N} = \gamma(k+1) + \frac{k}{N} < \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} = \delta_F(\varepsilon). \quad (15) \end{aligned}$$

Отметим отдельно оценку

$$\|u_j - a(t)\| \leq \gamma(k+1) + \frac{k}{N} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = 0, 1, \dots, N-1) \quad (16)$$

Используя условие (8) из леммы 1 для F , с помощью оценки (15) усилим оценку (14):

$$\rho(\dot{a}(t), \mu F(t, a(t), b(t), \mu)) \leq \mu \varepsilon \sigma_F(t)$$

для почти всех $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$).

Докажем теперь вторую из оценок (13). Имеем $\dot{b}(t) = \omega(t)$ почти всюду на $[0, \frac{1}{\mu}]$. Если t содержится в $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$), то $\omega(t) = \omega_j(t)$ и, следовательно,

$$\dot{b}(t) = \omega_j(t) \in G_0.$$

Теперь почти для всех $t \in [t_j, t_{j+1}]$ имеем следующее:

$$\begin{aligned} \rho(\dot{b}(t), G_0 + \mu G(t, a(t), b(t), \mu)) &= \rho(\omega_j(t), G_0 + \mu G(t, a(t), b(t), \mu)) \leq \\ &\leq \beta(G_0, G_0 + \mu G(t, a(t), b(t), \mu)) \leq \alpha(G_0, G_0 + \mu G(t, a(t), b(t), \mu)) \leq \\ &\leq \alpha(G_0, G_0) + \alpha(0, \mu G(t, a(t), b(t), \mu)) = \mu \|G(t, a(t), b(t), \mu)\| \leq \mu \lambda_G(t). \end{aligned}$$

Таким образом, найдены функции $a(t)$, $b(t)$ такие, что

$$\rho(\dot{a}(t), \mu F(t, a(t), b(t), \mu)) < \mu \varepsilon \sigma_F(t)$$

почти всюду на $[0, \frac{1}{\mu}]$ и

$$\rho(\dot{b}(t), G_0 + \mu G(t, a(t), b(t), \mu)) < \mu \lambda_G(t)$$

почти всюду на $[0, \frac{1}{\mu}]$.

Теперь на $[0, \frac{1}{\mu}]$ введём следующую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in F_H(t, x, y, \mu), \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y}(t) &\in G_H(t, x, y, \mu), \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $F_H(t, x, y, \mu) = \mu F(t, x, y, \mu) \cap H_F(t, x, y, \mu)$, $G_H(t, x, y, \mu) = (G_0 + \mu G(t, x, y, \mu)) \cap H_G(t, x, y, \mu)$, а H_F , H_G задаются такими условиями:

$$H_F(t, x, y, \mu) = \left\{ w \in \mathbb{R}^m : \langle a(t) - x, \dot{a}(t) - w \rangle \leq \frac{\mu \varepsilon \sigma_F(t)}{2} + \left(\mu A + \frac{\mu \varepsilon \sigma_F(t)}{2} \right) \|a(t) - x\|^2 + \mu B(\mu) \|b(t) - y\|^2 \right\},$$

$$H_G(t, x, y, \mu) = \left\{ w \in \mathbb{R}^m : \langle b(t) - y, \dot{b}(t) - w \rangle \leq \frac{\mu \lambda_G(t)}{2} + \mu C \|a(t) - x\|^2 + \left(\mu D + \frac{\mu \lambda_G(t)}{2} \right) \|b(t) - y\|^2 \right\}.$$

Чтобы эта задача имела смысл, нужно, чтобы отображения F_H и G_H имели непустые значения $F_H(t, x, y, \mu)$, $G_H(t, x, y, \mu) \forall \mu \in (0, \mu_0]$, $\forall (t, x, y) \in [0, \frac{1}{\mu}] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Проверим это.

В точках t , в которых $\dot{a}(t)$ или $\dot{b}(t)$ не существуют ($\dot{a}(t)$ и $\dot{b}(t)$ существуют почти всюду на $[0, \frac{1}{\mu}]$), отображения F_H и G_H можно доопределить произвольным образом так, чтобы $F_H(t, x, y, \mu)$ и $G_H(t, x, y, \mu)$ были непустые множества $\forall (x, y, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times (0, \mu_0]$.

Покажем, что $F_H(t, x, y, \mu)$, $G_H(t, x, y, \mu)$ — непустые множества и для тех $t \in [0, \frac{1}{\mu}]$, для которых $\dot{a}(t)$, $\dot{b}(t)$ существуют, $\forall (x, y, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times (0, \mu_0]$.

а) $F_H(t, x, y, \mu)$ — непустое множество.

Пусть $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in (0, \mu_0]$ — произвольные. Возьмём $v \in \mu F(t, a(t), b(t), \mu)$ такой, что

$$\|\dot{a}(t) - v\| = \rho(\dot{a}(t), \mu F(t, a(t), b(t), \mu)) < \mu \varepsilon \sigma_F(t).$$

По этому v найдём $w \in \mu F(t, x, y, \mu)$ из условия 7) для отображения μF . Это значит, что

$$\langle a(t) - x, v - w \rangle \leq \mu A \|a(t) - x\|^2 + \mu B(\mu) \|b(t) - y\|^2.$$

Теперь для этого w имеем:

$$\begin{aligned} \langle a(t) - x, \dot{a}(t) - w \rangle &= \langle a(t) - x, \dot{a}(t) - v \rangle + \langle a(t) - x, v - w \rangle \leq \|a(t) - x\| \cdot \|\dot{a}(t) - v\| + \\ &+ \mu A \|a(t) - x\|^2 + \mu B(\mu) \|b(t) - y\|^2 < \mu \varepsilon \sigma_F(t) \|a(t) - x\| + \mu A \|a(t) - x\|^2 + \mu B(\mu) \|b(t) - y\|^2 \leq \\ &\leq \frac{(\sqrt{\mu \varepsilon \sigma_F(t)} \|a(t) - x\|)^2}{2} + \frac{(\sqrt{\mu \varepsilon \sigma_F(t)})^2}{2} + \mu A \|a(t) - x\|^2 + \mu B(\mu) \|b(t) - y\|^2 = \\ &= \frac{\mu \varepsilon \sigma_F(t)}{2} + \left(\frac{\mu \varepsilon \sigma_F(t)}{2} + \mu A \right) \|a(t) - x\|^2 + \mu B(\mu) \|b(t) - y\|^2. \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает, что w , принадлежащее $\mu F(t, x, y, \mu)$, принадлежит $H_F(t, x, y, \mu)$, то есть $F_H(t, x, y, \mu)$ непусто.

б) $G_H(t, x, y, \mu)$ — непустое множество.

Пусть $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in (0, \mu_0]$ — произвольные. Возьмём $v \in G_0 + \mu G(t, a(t), b(t), \mu)$ такой, что

$$\|\dot{b}(t) - v\| = \rho(\dot{b}(t), G_0 + \mu G(t, a(t), b(t), \mu)) < \mu \lambda_G(t).$$

По этому v найдём $w \in G_0 + \mu G(t, x, y, \mu)$ из условия 8) для отображения $G_0 + \mu G(t, x, y, \mu)$. Это значит, что

$$\langle b(t) - y, v - w \rangle \leq \mu C \|a(t) - x\|^2 + \mu D \|b(t) - y\|^2.$$

Теперь для этого w имеем:

$$\begin{aligned} \langle b(t) - y, \dot{b}(t) - w \rangle &= \langle b(t) - y, \dot{b}(t) - v \rangle + \langle b(t) - y, v - w \rangle \leq \|b(t) - y\| \cdot \|\dot{b}(t) - v\| + \\ &+ \mu C \|a(t) - x\|^2 + \mu D \|b(t) - y\|^2 < \mu \lambda_G(t) \|b(t) - y\| + \mu C \|a(t) - x\|^2 + \mu D \|b(t) - y\|^2 \leq \\ &\leq \frac{(\sqrt{\mu \lambda_G(t)} \|b(t) - y\|)^2}{2} + \frac{(\sqrt{\mu \lambda_G(t)})^2}{2} + \mu C \|a(t) - x\|^2 + \mu D \|b(t) - y\|^2 = \\ &= \frac{\mu \lambda_G(t)}{2} + \mu C \|a(t) - x\|^2 + \left(\frac{\mu \lambda_G(t)}{2} + \mu D \right) \|b(t) - y\|^2. \end{aligned}$$

Это означает, что w , принадлежащий $G_0 + \mu G(t, x, y, \mu)$, принадлежит $H_G(t, x, y, \mu)$, то есть $G_H(t, x, y, \mu)$ непусто.

Итак, правые части дифференциальных включений системы (17) имеют непустые значения. Непосредственно проверяется также, что эти значения — выпуклые, замкнутые, а следовательно (в силу их ограниченности) и компактные множества в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно.

Таким образом, правые части F_H и G_H дифференциальных включений системы (17) при каждом $\mu \in (0, \mu_0]$ — отображения из $\left[0, \frac{1}{\mu}\right] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ в $Kv(\mathbb{R}^m)$, $Kv(\mathbb{R}^n)$ соответственно.

Задача Коши (17) для системы дифференциальных включений эквивалентна задаче Коши для одного дифференциального включения в пространстве $\mathbb{R}^{m+n}$:

$$\dot{w}(t) \in E(t, w, \mu), \quad w(0) = w_0 \quad (w_0 = (x_0, y_0)), \quad (18)$$

где отображение E со значениями в $Kv(\mathbb{R}^{m+n})$ определяется равенством

$$E(t, w, \mu) = F_H(t, w, \mu) \times G_H(t, w, \mu) \quad (w = (x, y)).$$

Для задачи (18) выполняются все условия теоремы из [4]. Поэтому при каждом $\mu \in (0, \mu_0]$ эта задача имеет на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ решение $w_\mu(t) = (x_\mu(t), y_\mu(t))$. Но задача (18) эквивалентна задаче Коши для системы дифференциальных включений (17). Следовательно, задача Коши (17) также имеет на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ решение $(x_\mu(t), y_\mu(t))$. Это решение тем более будет являться решением задачи (1).

При этом для него почти всюду на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ выполняются неравенства

$$\langle a(t) - x_\mu(t), \dot{a}(t) - \dot{x}_\mu(t) \rangle \leq \frac{\mu \varepsilon \sigma_F(t)}{2} + \left(\frac{\mu \varepsilon \sigma_F(t)}{2} + \mu A \right) \|a(t) - x_\mu(t)\|^2 + \mu B(\mu) \|b(t) - y_\mu(t)\|^2, \quad (19)$$

$$\langle b(t) - y_\mu(t), \dot{b}(t) - \dot{y}_\mu(t) \rangle \leq \frac{\mu \lambda_G(t)}{2} + \mu C \|a(t) - x_\mu(t)\|^2 + \left(\frac{\mu \lambda_G(t)}{2} + \mu D \right) \|b(t) - y_\mu(t)\|^2. \quad (20)$$

Введём на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ функции $m(t) = \|x_\mu(t) - a(t)\|^2$ и $n(t) = \|y_\mu(t) - b(t)\|^2$. Для них имеем почти всюду на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{d}{dt} \langle a(t) - x_\mu(t), a(t) - x_\mu(t) \rangle = 2 \langle a(t) - x_\mu(t), \dot{a}(t) - \dot{x}_\mu(t) \rangle \leq \\ &\leq \mu \varepsilon \sigma_F(t) + (\mu \varepsilon \sigma_F(t) + 2\mu A) \|a(t) - x_\mu(t)\|^2 + 2\mu B(\mu) \|b(t) - y_\mu(t)\|^2. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{d}{dt} \langle b(t) - y_\mu(t), b(t) - y_\mu(t) \rangle = 2 \langle b(t) - y_\mu(t), \dot{b}(t) - \dot{y}_\mu(t) \rangle \leq \\ &\leq \mu \lambda_G(t) + 2\mu C \|a(t) - x_\mu(t)\|^2 + (\mu \lambda_G(t) + 2\mu D) \|b(t) - y_\mu(t)\|^2 \end{aligned}$$

для почти всех $t \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right]$.

Таким образом, для почти всех $t \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ выполняется

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &\leq \mu \varepsilon \sigma_F(t) + (\mu \varepsilon \sigma_F(t) + 2\mu A) m(t) + 2\mu B(\mu) n(t), & m(0) &= 0, \\ \dot{n}(t) &\leq \mu \lambda_G(t) + 2\mu C m(t) + (\mu \lambda_G(t) + 2\mu D) n(t), & n(0) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть функция $m_1(t)$ — решение на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ задачи Коши

$$\dot{m}_1(t) = \mu \varepsilon \sigma_F(t) + (\mu \varepsilon \sigma_F(t) + 2\mu A) m_1(t) + 2\mu B(\mu) n(t), \quad m_1(0) = 0. \quad (22)$$

Здесь функция $n(t)$ — та же, что и в системе (21).

Покажем, что $m(t) \leq m_1(t)$ на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$. Отсюда и из (22) будет следовать, что $\dot{m}_1(t) > 0$ на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$.

Из первого неравенства системы (21) и уравнения задачи (22) находим для почти всех $t \in [0, \frac{1}{\mu}]$:

$$\dot{m}(t) - \dot{m}_1(t) \leq (\mu \varepsilon \sigma_F(t) + 2\mu A)(m(t) - m_1(t)). \quad (23)$$

Для функции

$$m_2(t) = (m(t) - m_1(t)) \exp \left(-\mu \varepsilon \int_0^t \sigma_F(\tau) d\tau - 2\mu A t \right)$$

в силу (23) почти всюду на $[0, \frac{1}{\mu}]$ имеем, что $\dot{m}_2(t) \leq 0$. Учитывая, что $m_2(0) = 0$, делаем следующий вывод: $m_2(t) \leq 0$ на отрезке $[0, \frac{1}{\mu}]$. Значит, $m(t) \leq m_1(t)$ на этом отрезке.

Таким образом, на отрезке $[0, \frac{1}{\mu}]$ найдены функции $m_1(t)$ и $n(t)$ такие, что

- а) $\|a(t) - x_\mu(t)\|^2 \leq m_1(t)$, $\|b(t) - y_\mu(t)\|^2 = n(t)$ на $[0, \frac{1}{\mu}]$;
- б) $\dot{m}_1(t) > 0$ на $[0, \frac{1}{\mu}]$ (то есть $m_1(t)$ возрастает на $[0, \frac{1}{\mu}]$);
- с) $\dot{m}_1(t) = \mu \varepsilon \sigma_F(t) + (\mu \varepsilon \sigma_F(t) + 2\mu A)m_1(t) + 2\mu B(\mu)n(t)$, $\dot{n}(t) \leq \mu \lambda_G(t) + 2\mu C m_1(t) + (\mu \lambda_G(t) + 2\mu D)n(t)$, $m_1(0) = 0$, $n(0) = 0$.

Для функции

$$n_1(t) = n(t) \exp \left(-\mu \int_0^t \lambda_G(\tau) d\tau - 2\mu D t \right) \quad (24)$$

в силу неравенства из условия с) имеем

$$\dot{n}_1(t) \leq (\mu \lambda_G(t) + 2\mu C m_1(t)) \exp \left(-\mu \int_0^t \lambda_G(\tau) d\tau - 2\mu D t \right),$$

откуда находим

$$n_1(t) \leq \int_0^t (\mu \lambda_G(r) + 2\mu C m_1(r)) \exp \left(-\mu \int_0^r \lambda_G(\tau) d\tau - 2\mu D r \right) dr.$$

В таком случае, из (24) получим

$$n(t) \leq \exp \left(\mu \int_0^t \lambda_G(\tau) d\tau + 2\mu D t \right) \cdot \int_0^t (\mu \lambda_G(r) + 2\mu C m_1(r)) \exp \left(-\mu \int_0^r \lambda_G(\tau) d\tau - 2\mu D r \right) dr.$$

Используя условие б) и неотрицательность функции $\lambda_G(t)$, усиливаем полученную оценку:

$$n(t) \leq \exp \left(\mu \int_0^{1/\mu} \lambda_G(\tau) d\tau + 2\mu D / \mu \right) \cdot \left(\mu \int_0^{1/\mu} \lambda_G(r) dr + 2\mu C \int_0^{1/\mu} m_1(t) dr \right) \leq (k + 2C m_1(t)) \exp(k + 2D)$$

на отрезке $[0, \frac{1}{\mu}]$.

Используя эту оценку, из уравнения условия с) находим

$$\dot{m}_1(t) \leq \mu \varepsilon \sigma_F(t) + (\mu \varepsilon \sigma_F(t) + 2\mu A) m_1(t) + 2\mu B(\mu) \exp(k + 2D) (k + 2C m_1(t)).$$

Учитывая, что по выбору μ_0 , $B(\mu) < \varepsilon < 1$, усиливаем оценку :

$$\dot{m}_1(t) \leq \mu (\sigma_F(t) + 2A + 4C \exp(k + 2D)) m_1(t) + \mu \varepsilon (\sigma_F(t) + 2k \exp(k + 2D)).$$

Если обозначить $\sigma_F(t) + 2A + 4C \exp(k + 2D)$ через $p(t)$, а $\sigma_F(t) + 2k \exp(k + 2D)$ — через $q(t)$ (заметим, что $p(t) > 0$, $q(t) > 0$ на $[0, \frac{1}{\mu}]$), то последнее неравенство примет вид

$$\dot{m}_1(t) \leq \mu p(t) m_1(t) + \mu \varepsilon q(t). \quad (25)$$

Если обозначить через $m_2(t)$ решение задачи Коши

$$\dot{m}_2(t) = \mu p(t)m_2(t) + \mu \varepsilon q(t), \quad m_2(0) = 0, \quad (26)$$

то $m_1(t) \leq m_2(t)$ на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$. В самом деле, из (25) и (26) следует

$$(m_1(t) - m_2(t))' \leq \mu p(t)(m_1(t) - m_2(t)).$$

Поэтому для функции

$$m_3(t) = (m_1(t) - m_2(t)) \exp\left(-\mu \int_0^t p(\tau) d\tau\right)$$

выполняется $\dot{m}_3(t) \leq 0$ почти всюду на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$. Так как $m_3(0) = 0$, отсюда следует, что $m_3(t) \leq 0$ на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$, то есть $m_1(t) \leq m_2(t)$ на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$.

Решая уравнение (26), находим вид $m_2(t)$:

$$m_2(t) = \exp\left(\mu \int_0^t p(\tau) d\tau\right) \cdot \int_0^t \mu \varepsilon q(r) \exp\left(-\mu \int_0^r p(\tau) d\tau\right) dr.$$

Учитывая вид функций $p(t)$ и $q(t)$, найденное выражение для $m_2(t)$ позволяет получить следующую оценку для $m_2(t)$, а, значит и для $m_1(t)$, на отрезке $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$:

$$\begin{aligned} m_1(t) \leq m_2(t) &= \exp\left(\mu \int_0^t (\sigma_F(\tau) + 2A + 4C \exp(k + 2D)) d\tau\right) \cdot \int_0^t \mu \varepsilon (\sigma_F(r) + 2k \exp(k + 2D)) \times \\ &\times \exp\left(-\mu \int_0^r p(\tau) d\tau\right) dr \leq \exp\left(\mu \int_0^t \sigma_F(\tau) d\tau + 2A\mu t + 4Ct\mu \exp(k + 2D)\right) \times \\ &\times \mu \varepsilon \left(\int_0^t \sigma_F(r) dr + 2kt \exp(k + 2D)\right) \leq \exp(k + 2A + 4C \exp(k + 2D)) \cdot \varepsilon (k + 2k \exp(k + 2D)) = \varepsilon M, \end{aligned}$$

где константа $M = k(1 + 2 \exp(k + 2D)) \cdot \exp(k + 2A + 4C \exp(k + 2D))$.

Как отмечалось выше, $\|a(t) - x_\mu(t)\|^2 \leq m_1(t)$ на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$. Поэтому $\|a(t) - x_\mu(t)\|^2 \leq \varepsilon M$ на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$.

Таким образом, на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ найдено решение $(x_\mu(t), y_\mu(t))$ задачи (1), для медленных переменных $x_\mu(t)$ которого выполняется оценка

$$\|a(t) - x_\mu(t)\| \leq \sqrt{\varepsilon M} \quad \text{на} \quad \left[0, \frac{1}{\mu}\right].$$

Чтобы теперь оценить $\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\|$ на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$, оценим сначала $\|u_\mu(t) - a(t)\|$ на $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$. Эту оценку нетрудно получить, если использовать (16):

$$\|u_j - a(t)\| \leq \gamma(k+1) + \frac{k}{N} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = 0, 1, \dots, N-1).$$

Тогда для любого $t \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ имеем

$$\begin{aligned} \|u_\mu(t) - a(t)\| &\leq \|u_\mu(t) - u_j\| + \|u_j - a(t)\| \leq \mu \int_{t_j}^t \|v(s)\| ds + \gamma(k+1) + \frac{k}{N} \leq \\ &\leq \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_{F_0}(s) ds + \gamma(k+1) + \frac{k}{N} \leq \mu k \Delta + \gamma(k+1) + \frac{k}{N} = \frac{k}{N} + \gamma(k+1) + \frac{k}{N} < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

После этого находим интересующую нас оценку:

$$\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| \leq \|x_\mu(t) - a(t)\| + \|a(t) - u_\mu(t)\| \leq \sqrt{\varepsilon M} + 3\varepsilon \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right].$$

В силу произвольности ε это означает, что задача (2) аппроксимирует снизу задачу (1). Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Филатов, О.П.* Усреднение систем дифференциальных включений [Текст] / О.П. Филатов, М.М. Хапаев. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 160 с.
2. *Филатов, О.П.* Разностная аппроксимация и теорема усреднения для дифференциальных включений [Текст] / О.П. Филатов // Сиб. ж. индустр. мат. — 2006. — Т. IX, № 2(26). — С. 137–152.
3. *Donchev, T.* Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions [Text] / T. Donchev, E. Farkhi // SIAM J. Control OPTIM. — 1998. — Vol. 36, No. 2. — P. 780–796.
4. *Deimling, K.* Multivalued differential equations [Text] / K. Deimling. — Berlin.: De Gruyter, 1992. — 260 p.
5. *Соколовская, Е.В.* Об аппроксимации снизу дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью [Текст] / Е.В. Соколовская // Вестн. Сам. госуд. ун-та. — 2004. — Спец. вып. — С. 50–63.

Самарский государственный университет, г. Самара
elsolona@list.ru

Поступила 23.11.2006