Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Д. Джураев, Ю. П. Апаков, Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 18–26

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:13:52

УДК 517.956

Т. Д. Джураев, Ю. П. Апаков

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками получено фундаментальное решение с помощью построения автомоделного решения.

В работе рассматривается уравнение

$$u_{xxx} - u_{yy} = 0. \quad (1)$$

Фундаментальные решения уравнения (1) построены и изучены в работах [1, 2], где они построены в виде суперпозиции специально подобранных элементарных решений.

В настоящей работе эти решения строятся как предельный случай определённых линейных задач. Для этой цели используем так называемый метод подобия, применённый Тихоновым—Самарским для уравнения $u_{xx} - u_y = 0$ [3]. Этот метод позволяет сравнительно легко построить фундаментальные решения и изучить их свойства без применений сложных вычислений и позволяет свести их к классическим специальным функциям, таким как вырожденные гипергеометрические функции, свойства которых хорошо изучены.

Легко заметить, что уравнение (1) инвариантно относительно преобразования

$$x' = kx, \quad y' = k^{3/2}y, \quad (2)$$

где k — произвольный параметр. Из (2) вытекает, что если масштаб переменной x меняется в k раз, то масштаб переменной y меняется в $k^{3/2}$ раза.

1. Рассмотрим следующую линейную задачу.

ЗАДАЧА А. Найти решение уравнение (1), удовлетворяющее условию

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0; \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение задачи А. При указанных изменениях масштабов условие (3) остается без изменения, поэтому для функции $u(x, y)$ должно иметь место равенство

$$u(x, y) = u(kx, k^{3/2}y) \quad (4)$$

при любых значениях x , y и k .

Полагая в (4) $k = y^{-2/3}$, получим

$$u(x, y) = u\left(\frac{x}{y^{2/3}}, 1\right) = \vartheta(t), \quad t = \frac{x}{y^{2/3}}.$$

Таким образом, $u(x, y)$ зависит только от аргумента $t = \frac{x}{y^{2/3}}$.

Полученные таким образом решения обычно называют автомоделными, то есть решение получается в виде функции $f\left(\frac{x}{y^\alpha}\right)$, где число α называется показателем автомоделности [4].

Учитывая (3), для функции $\vartheta(t)$ получим следующие предельные условия:

$$\vartheta(-\infty) = 0, \quad \vartheta(+\infty) = 1. \quad (5)$$

Вычисляя производные $u(x, y)$ и подставляя их в уравнение (1), получим

$$\vartheta''' - \frac{4}{9}t^2\vartheta'' - \frac{10}{9}t\vartheta' = 0.$$

Полагая $\vartheta' = c\varphi$, имеем

$$\varphi'' - \frac{4}{9}t^2\varphi' - \frac{10}{9}t\varphi = 0, \quad (6)$$

где

$$\vartheta(t) = c \int_{-\infty}^t \varphi(\tau) d\tau, \quad c = \text{const} \neq 0. \quad (7)$$

В равенстве (7) нижний предел интегрирования выбран с учётом выполнения первого условия (5). Чтобы удовлетворить второму условию в (5), следует положить

$$c = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) d\tau \right]^{-1}.$$

Тогда для функции $\vartheta(t)$ выполняется: $\vartheta(\infty) = 1$.

Итак, задача А свелась к следующей задаче: найти решение уравнение (6), принадлежащее классу $L(-\infty, \infty)$.

Теперь займёмся решением уравнения (6).

Следует отметить, что авторы [1, 2] уравнение (6) исследовали асимптотическими методами. В настоящей работе применяется следующий подход. Заменяя переменные по формуле

$$\varphi(t) = tZ(\xi), \quad \xi = \frac{4}{27}t^3, \quad (8)$$

получим

$$\xi Z'' + \left(\frac{4}{3} - \xi \right) Z' - \frac{7}{6} Z = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) — стандартная форма вырожденного гипергеометрического уравнения. Как известно [5, 6], вырожденное гипергеометрическое уравнение имеет вид

$$xy'' + (c - x)y' - ay = 0.$$

Линейно независимые решения этого уравнения являются вырожденными гипергеометрическими функциями:

$$y_1(x) = \Phi(a, c; x), \quad y_2(x) = \Psi(a, c; x),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(a, c; x) &= 1 + \frac{a}{c} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(a)_n}{(c)_n} \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots; \\ \Psi(a, c; x) &= \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)} \Phi(a, c; x) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} x^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; x); \\ (a)_n &= a(a+1)(a+2) \dots [a+(n-1)], \quad (a)_0 = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что для вырожденной гипергеометрической функции нет единого обозначения. Мы придерживаемся обозначений, принятых в [5].

Линейно независимые решения уравнения (9) имеют такой вид:

$$Z_1(\xi) = \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad Z_2(\xi) = \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right).$$

Возвращаясь к старым переменным, получим выражения для $\varphi(y)$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= tZ_1(\xi) = t\Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27}t^3\right) = t\Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right); \\ \varphi_2(t) &= tZ_2(\xi) = t\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad \xi = \frac{4}{27}t. \end{aligned}$$

Как известно [7], $\varphi_1(t) \in L(-\infty, 0)$, $\varphi_2(t) \in L(-\infty, \infty)$.

Итак, решение уравнения (6) существует, тем самым существует автомодельное решение уравнения (1) с показателем $\alpha = \frac{2}{3}$. Мы можем написать общее решение уравнения (6) в виде

$$\varphi(t) = c_1 t \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) + c_2 t \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right),$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, $\xi = \frac{4}{27} t^3$.

Вырожденные гипергеометрические функции хорошо изучены и имеются их точные оценки при $x \rightarrow \pm\infty$ [5, 6].

Учитывая равенство (10), получим

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) = t \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) &= t \frac{\Gamma(-\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})} \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) + t \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{7}{6})} \left(\frac{4}{27} t^3\right)^{-\frac{1}{3}} \Phi\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}; \xi\right) = \\ &= \frac{\Gamma(-\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})} t \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) + \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{7}{6})} \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \Phi\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}; \xi\right). \end{aligned}$$

Используя элементарное соотношение для гамма-функции, получим

$$\varphi_2(t) = t \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) = \frac{3}{2^{1/3} \sqrt{\pi}} \left[3 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Phi\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}; \xi\right) - \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) t \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) \right]. \quad (11)$$

Чтобы получить решение задачи А, вычислим постоянную c , входящую в формулу (7):

$$\begin{aligned} c^{-1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t) dt = \int_0^{\infty} \varphi_2(t) dt + \int_{-\infty}^0 \varphi_2(t) dt = J_1 + J_2; \\ J_1 &= \int_0^{\infty} \varphi_2(t) dt = \int_0^{\infty} t \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) dt = \int_0^{\infty} t \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27} t^3\right) dt. \end{aligned}$$

Полагая

$$\frac{4}{27} t^3 = \xi, \quad t = \left(\frac{27}{4}\right)^{1/3} \xi^{1/3}, \quad dt = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \frac{1}{3} \xi^{-2/3} d\xi,$$

получим

$$J_1 = \int_0^{\infty} \left(\frac{27}{4}\right)^{1/3} \xi^{1/3} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \xi^{-2/3} d\xi \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^{\infty} \xi^{-1/3} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) d\xi = \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} \frac{\Gamma(2/3)\Gamma(1/2)\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/6)\Gamma(5/6)} = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{\pi}}{2^{1/3}}.$$

Здесь учитывалось соотношение

$$\int_0^{\infty} t^{b-1} \Psi(a, c; t) dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(a-b)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}.$$

Вычислим интеграл J_2 :

$$J_2 = \int_{-\infty}^0 \varphi_2(t) dt = \int_0^{\infty} \varphi_2(-t) dt = \frac{9\Gamma(2/3)}{2^{1/3} \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}; -\frac{4}{27} t^3\right) dt + \frac{3\Gamma(1/3)}{2^{1/3} \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; -\frac{4}{27} t^3\right) dt.$$

Здесь также, произведя замену $\frac{4}{27} t^3 = \xi$ и учитывая равенство

$$\int_0^{\infty} t^{b-1} \Phi(a, c; -t) dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)},$$

получим

$$J_2 = \frac{2 \cdot 9\sqrt{\pi}}{2^{1/3}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}\sqrt{\pi}}{2^{1/3}} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}\sqrt{\pi}}{2^{1/3}}.$$

Итак,

$$c^{-1} = J_1 + J_2 = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{\pi}}{2^{1/3}} + \frac{6\sqrt{3}\sqrt{\pi}}{2^{1/3}} = \frac{9\sqrt{3}\sqrt{\pi}}{2^{1/3}},$$

и далее $c = \frac{2^{1/3}}{9\sqrt{3}\sqrt{\pi}}$.

Вводя обозначение $\gamma = \frac{3\sqrt{3}\pi}{2^{1/3}}$, получим

$$J_1 = \int_0^\infty \varphi_2(\tau) d\tau = \gamma, \quad J_2 = \int_{-\infty}^0 \varphi_2(\tau) d\tau = 2\gamma, \quad c^{-1} = \int_{-\infty}^\infty \varphi_2(\tau) d\tau = 3\gamma, \quad c = \frac{1}{3\gamma}.$$

Тогда решение задачи А запишется в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{3\gamma} \int_{-\infty}^t \varphi_2(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Обозначив правую часть (12) через $F\left(\frac{x}{y^{2/3}}\right)$, решение задачи А можно записать иначе:

$$u(x, y) = F\left(\frac{x}{y^{2/3}}\right), \quad \text{где} \quad F\left(\frac{x}{y^{2/3}}\right) = \frac{1}{3\gamma} \int_{-\infty}^{\frac{x}{y^{2/3}}} \varphi_2(\tau) d\tau.$$

Если в задаче А начальные условия имеют вид

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq \bar{x}; \\ 0, & \text{при } x < \bar{x}, \end{cases}$$

то решение запишется так:

$$u(x, y) = F\left(\frac{x - \bar{x}}{y^{2/3}}\right).$$

Пусть в задаче А начальное условие задаётся в виде

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < x_1, \\ 1, & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & \text{при } x > x_2. \end{cases}$$

Тогда решение представляется соотношением

$$u(x, y) = F\left(\frac{x - x_1}{y^{2/3}}\right) - F\left(\frac{x - x_2}{y^{2/3}}\right), \quad (13)$$

которое можно записать следующим образом:

$$u(x, y) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \xi} F\left(\frac{x - \xi}{y^{2/3}}\right) d\xi. \quad (14)$$

Функцию

$$- \frac{\partial}{\partial \xi} F\left(\frac{x - \xi}{y^{2/3}}\right) \equiv U^*(x, y; \xi)$$

назовём функцией влияния мгновенного точечного источника. Её можно представить в виде

$$U^*(x, y; \xi) = - \frac{\partial}{\partial \xi} F\left(\frac{x - \xi}{y^{2/3}}\right) = \frac{1}{3\gamma} \frac{1}{y^{2/3}} \varphi_2\left(\frac{x - \xi}{y^{2/3}}\right)$$

или

$$U^*(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{(x-\eta)^{2/3}}\right), \quad (15)$$

где $f^*(t) = \frac{1}{3\gamma} \varphi_2(t) = \frac{1}{3\gamma} t \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27} t^3\right)$, $-\infty < t < \infty$.

Функцию $U^*(x, y; \xi, \eta)$ назовём функцией источника на всей прямой. При таком обозначении решение задачи А запишется в виде

$$u(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} U^*(x, y; \xi, 0) d\xi, \quad -\infty < \frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}} < \infty.$$

Для функции $f^*(t)$ имеют место следующие соотношения:

$$\int_0^\infty f^*(\tau) d\tau = \frac{1}{3}, \quad \int_{-\infty}^0 f^*(\tau) d\tau = \frac{2}{3}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\tau) d\tau = 1.$$

Учитывая оценку при $|t| \rightarrow \infty$ и используя дифференциальные свойства функции $\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27} t^3\right)$, получим следующие оценки для функции $f^*(t)$:

$$|f^{*(v)}(t)| \leq \bar{c} |t|^{-\frac{5+2v}{2}}, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

С другой стороны, этот результат можно получить и из физических соображений. Действительно, название «точечного источника» объясняется следующим образом. Уравнение (1) описывает тот или иной физический процесс. Пусть в начальный момент времени $y = 0$ на участке $(x_1; x_2)$ помещён источник, действующий с постоянной мощностью, равной единице. Влияние этого источника на участок $(x_1; x_2)$ определяется функцией (13). Нас интересует предельный процесс, когда $x_1 \rightarrow x_2$. Тогда действующий источник превращается в точечный источник, мощность которого равна $\frac{1}{x_2 - x_1}$. Его влияние определяется функцией (при достаточно близких x_1 и x_2)

$$u(x, y) = \frac{1}{x_2 - x_1} \left[F\left(\frac{x - x_1}{y^{2/3}}\right) - F\left(\frac{x - x_2}{y^{2/3}}\right) \right]. \quad (16)$$

Предельный переход в формуле (16) при $x_1 \rightarrow x_2$ даёт

$$u(x, y) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[F\left(\frac{x - \xi}{y^{2/3}}\right) \right] \Big|_{\xi=x_1}. \quad (17)$$

Производя дифференцирование, получим функцию мгновенного точечного источника.

2. Теперь построим решение уравнения (16), принадлежащее классу $L(-\infty, 0)$. Имеем

$$\varphi_1(t) = t \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad \xi = \frac{4}{27} t^3.$$

Подставив $\varphi_1(\tau)$ вместо $\varphi(\tau)$ в формуле (7), получим

$$u(x, y) = \vartheta(t) = c_1 \int_{-\infty}^t \varphi_1(\tau) d\tau, \quad -\infty < t < 0, \quad (18)$$

где c_1 — некоторая постоянная. Эта функция непрерывна и ограничена при $x \leq 0$, удовлетворяет уравнению (1) и условиям

$$u(0, y) = 1, \quad u(x, 0) = 0$$

в области $(-\infty, 0)$, если

$$c_1 = \left(\int_{-\infty}^0 \varphi_1(\tau) d\tau \right)^{-1}.$$

Вычислим постоянную c_1 . Имеем

$$c_1^{-1} = \int_{-\infty}^0 \varphi_1(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 t \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27} t^3\right) dt = - \int_0^{\infty} t \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; -\frac{4}{27} t^3\right) dt.$$

Положив

$$\frac{4}{27} t^3 = \xi, \quad t = \left(\frac{27}{4}\right)^{1/3} \xi^{1/3}, \quad dt = \left(\frac{27}{4}\right)^{1/3} \frac{1}{3} \xi^{-2/3} d\xi,$$

получим

$$c_1^{-1} = -\frac{3}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^{\infty} \xi^{-1/3} \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, -\xi\right) d\xi = -\frac{3}{2\sqrt[3]{2}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{6})\Gamma(\frac{2}{3})} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{2\Gamma(\frac{1}{3})}, \quad c_1 = -\frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}.$$

Тогда функция (18) примет вид

$$u(x, y) = c_1 \int_{-\infty}^{\frac{x}{y^{2/3}}} \varphi_1(\tau) d\tau = c_1 \int_{-\infty}^x \frac{1}{y^{2/3}} \varphi_1\left(\frac{\xi}{y^{2/3}}\right) d\xi = -c_1 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y^{2/3}} \varphi_1\left(\frac{-|x-\xi|}{y^{2/3}}\right) d\xi.$$

Если функция $u(x, y)$ рассматривается не при $x \leq 0$, а при $x \leq x_1 < 0$, то функция (18) имеет вид

$$u(x, y) = c_1 \int_{-\infty}^{\frac{x-x_1}{y^{2/3}}} \varphi_1(\tau) d\tau.$$

Полученную функцию можно записать так:

$$u(x, y) = - \int_{-\infty}^{x_1} c_1 \frac{1}{y^{2/3}} \varphi_1\left(\frac{x-\xi}{y^{2/3}}\right) d\xi.$$

Обозначим подынтегральное выражение через

$$V^*(x, y, \xi) = -c_1 \frac{1}{y^{2/3}} \varphi_1\left(\frac{x-\xi}{y^{2/3}}\right) d\xi = -\frac{1}{y^{2/3}} \varphi^*(t), \quad (19)$$

где $\varphi^*(t) = c_1 \varphi_1(t) = \frac{2\Gamma(\frac{1}{3})}{\sqrt{3}\pi} t \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{4}{27} t^3\right).$

Функцию

$$V^*(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} \varphi_1^*(t), \quad t < 0$$

назовём функцией источника на полупрямой.

Для функции $\varphi^*(t)$ имеет место равенство $\int_{-\infty}^0 \varphi^*(\tau) d\tau = 1.$

Учитывая оценку при $t \rightarrow -\infty$ и используя дифференциальные свойства функции $\Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{4}{27} t^3\right)$, получим следующие оценки для функции $\varphi^*(t)$:

$$|\varphi^{*(v)}(t)| \leq \bar{c} |t|^{-\frac{5+2v}{2}}, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

3. Теперь приступим к построению фундаментальных решений уравнения (1).

Рассмотрим формы

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y-\eta|^{1/3} f\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right), \quad V(x, y; \xi, \eta) = |y-\eta|^{1/3} \varphi\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right). \quad (20)$$

Подберём функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$U_y(x, y; \xi, \eta) = U^*(x, y; \xi, \eta) \operatorname{sgn}(y - \eta), \quad V_y(x, y; \xi, \eta) = V^*(x, y; \xi, \eta) \operatorname{sgn}(y - \eta).$$

Вычислив в равенстве (20) производную, получим

$$\frac{1}{3} [f(t) - 2tf'(t)] = f^*(t) = \frac{1}{3\gamma} t\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad \frac{1}{3} [\varphi(t) - 2t\varphi'(t)] = \varphi^*(t) = \frac{2\Gamma(\frac{1}{3})}{\sqrt{3}\pi} t\Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) \quad (21)$$

или

$$f(t) - 2tf'(t) = \frac{1}{\gamma} t\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad \varphi(t) - 2t\varphi'(t) = \frac{6\Gamma(\frac{1}{3})}{\sqrt{3}\pi} t\Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad (22)$$

где $\xi = \frac{4}{27}t^3$, $\gamma = \frac{3\sqrt{3}\pi}{2^{1/3}}$.

Из (22) необходимо определить функции $f(t)$ и $\varphi(t)$. Уравнение (22) является линейным неоднородным уравнением первого порядка относительно функций f и φ , его можно решать обычным методом. При этом решение получается в интегральной форме [1, 2]. Мы исходим из других соображений.

Покажем, что функции

$$f(t) = c_2 t\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad \varphi(t) = c_3 t\Phi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) \quad (23)$$

являются соответствующими двумя решениями уравнений (22). Здесь c_2, c_3 — некоторые постоянные, которые определяются так, чтобы выполнялось равенство (21). Подставив $f(t)$ в первое уравнение (22), получим

$$\begin{aligned} c_2 \left\{ t\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \xi\right) - 2t \left[t\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \xi\right) \right]' \right\} &= c_2 \left\{ t\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \xi\right) - 2t\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \xi\right) - 2t^2\Psi'_\xi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \xi\right)\xi_t \right\} = \\ &= -c_2 t \left\{ \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \xi\right) + 6\xi\Psi'_\xi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \xi\right) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда (22) принимает вид

$$-c_2 t \left[\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) + 6\xi\Psi'_\xi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) \right] = \frac{1}{\gamma} t\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \xi\right). \quad (24)$$

Учитывая соотношение для вырожденной гипергеометрической функции

$$\xi\Psi'_\xi(a, c; \xi) + a\Psi(a, c, \xi) = a(a - c + 1)\Psi(a + 1, c; \xi),$$

при $a = \frac{1}{6}$, $c = \frac{4}{3}$ имеем

$$6\xi\Psi'_\xi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) + \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) = -\frac{1}{6}\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right). \quad (25)$$

Сравнивая (24) и (25), получим

$$-c_2 t \left(-\frac{1}{6} \right) \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) = \frac{1}{\gamma} t\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right),$$

Отсюда $\frac{c_2}{6} = \frac{1}{\gamma}$, $c_2 = \frac{6}{\gamma} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi}$. Подставив $\varphi(t)$ во второе уравнение (22), точно также находим $c_3 = \frac{36\Gamma(\frac{1}{3})}{\sqrt{3}\pi}$.

Отсюда заключаем, что функции

$$f(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi} t\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad \varphi(t) = \frac{36\Gamma(\frac{1}{3})}{\sqrt{3}\pi} t\Phi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) \quad (26)$$

удовлетворяют уравнениям (22).

Функции

$$\begin{aligned} U(x, y; \xi, \eta) &= |y - \eta|^{1/3} f\left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/3}}\right), \quad -\infty < \frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/3}} < \infty, \\ V(x, y; \xi, \eta) &= |y - \eta|^{1/3} \varphi\left(\frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/3}}\right), \quad \frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/3}} < 0 \end{aligned} \quad (27)$$

назовём фундаментальными решениями уравнений (1), где $f(t)$, $\varphi(t)$ имеют вид (26).

Учитывая оценки при $|t| \rightarrow \infty$ и используя дифференциальные свойства функций $\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right)$, получим для фундаментальных решений $U(x, y; \xi, \eta)$ и их частных производных следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^{h+k} U}{\partial x^h \partial y^k} \right| \leq |y - \eta|^{-\frac{1-(-1)^k}{2}} |x - \xi|^{-\frac{1}{2} \left[2h+3k-1+\frac{3}{2}(1-(-1)^k) \right]}, \quad h=0, 1, 2, 3, \quad k=0, 1, 2. \quad (28)$$

Для фундаментальных решений $V(x, y; \xi, \eta)$ при $\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}} \rightarrow -\infty$ получим аналогичные оценки типа (28).

Выражение фундаментальных решений уравнения (1) через вырожденные гипергеометрические функции позволяет легко установить следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Для функций $f(t)$ или $f^*(t)$ справедливо соотношение

$$f''(t) + \frac{2}{3} t f'(t) = 0, \quad (29)$$

где

$$f(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}} t \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad f^*(t) = \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}} t \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad \xi = \frac{4}{27} t^3.$$

Доказательство. Вычислим $f'(t)$:

$$f'(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}} \left[\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) + t \cdot \frac{4}{27} \cdot 3t^2 \Psi'\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) \right] = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}} \left[\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) + 3 \cdot \xi \Psi'\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) \right].$$

Используя соотношение [5], имеем

$$\xi \Psi'(a, c; \xi) = (a - c + 1) \cdot a \Psi(a + 1, c; \xi) - a \Psi(a, c; \xi). \quad (30)$$

При $a = \frac{1}{6}$, $c = \frac{4}{3}$ получим

$$\xi \Psi'\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) = -\frac{1}{36} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) - \frac{1}{6} \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right).$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{3\pi}}{2\sqrt[3]{2}} f'(t) = \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) - \frac{1}{12} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right).$$

Дифференцируя ещё раз, находим

$$\frac{\sqrt{3\pi}}{2\sqrt[3]{2}} f''(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{27} \cdot 3t^2 \Psi'\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) - \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{27} \cdot 3t^2 \Psi'\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) = \frac{3}{2t} \xi \cdot \Psi'\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) - \frac{1}{4t} \xi \Psi'\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right).$$

Учитывая (30) и соотношение [5]

$$\xi \Psi'(a, c; \xi) = (a - c + \xi) \Psi(a, c; \xi) - \Psi(a - 1, c; \xi),$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3\pi}}{2\sqrt[3]{2}} f''(t) &= \frac{3}{2t} \left[-\frac{1}{36} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) - \frac{1}{6} \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) \right] - \frac{1}{4t} \left[\left(-\frac{1}{6} + \xi\right) \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) - \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) \right] = \\ &= -\frac{1}{4t} \xi \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) = -\frac{t^2}{27} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) = -\frac{2t}{3} \left[\frac{t}{18} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, находим

$$f''(t) = -\frac{2t}{3} \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}} \left[\frac{1}{18} t \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \xi\right) \right] = -\frac{2t}{3} \left[\frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}} t \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \xi\right) \right] = -\frac{2t}{3} f^*(t),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Точно также доказывается равенство

$$\varphi''(t) + \frac{2t}{3} \varphi^*(t) = 0.$$

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место следующие предельные равенства:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{5/2} f^*(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{5/2} \varphi^*(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1/2} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{-1/2} \varphi(t) = 0.$$

Доказательство. Как известно [5], имеет место соотношение

$${}_2F_0\left(\alpha, \beta, -\frac{1}{\xi}\right) = \xi^\alpha \Psi(\alpha, \alpha - \beta + 1; \xi), \quad (31)$$

где

$${}_2F_0\left(\alpha, \beta, -\frac{1}{\xi}\right) = \left(-\frac{1}{\xi}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_m (\beta+1)_m}{(2)_m m!} (-1)^m \frac{1}{\xi^m}. \quad (32)$$

Этот ряд сходится абсолютно для всех значений, лежащих внутри круга $\left|\frac{1}{\xi}\right| < 1$, и при значениях параметров α и β , отличных от $0, -1, -2, \dots$. Мы здесь говорим о круге сходимости, так как (32) верно и для комплексных значений α, β и $\frac{1}{\xi}$ [5].

Положив в (31) $\alpha = \frac{7}{6}, \beta = \frac{5}{6}$, получим

$${}_2F_0\left(\frac{7}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{\xi}\right) = \xi^{\frac{7}{6}} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) = \left(\frac{4}{21}\right)^{\frac{7}{6}} t^{\frac{7}{2}} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right) = \left(\frac{4}{27}\right)^{\frac{7}{6}} 3\gamma t^{\frac{5}{2}} f^*(t) = c_4 t^{\frac{5}{2}} f^*(t).$$

Отсюда и из выражения (32) находим

$$c_4 t^{\frac{5}{2}} f^*(t) = {}_2F_0\left(\frac{7}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{\xi}\right) = \left(-\frac{1}{\xi}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{13}{6}\right)_m \left(\frac{11}{6}\right)_m}{(2)_m m!} (-1)^m \frac{1}{\xi^m}.$$

При $|\xi| \rightarrow \infty$ имеем ${}_2F_0\left(\frac{7}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{\xi}\right) = 0$, то есть $c_4 t^{\frac{5}{2}} f^*(t) = 0$, что и требовалось доказать. Остальные соотношения доказываются аналогично. $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Block, H. Sur les equations lineaires aux derivies partielles a caracteristiques multiples [Text] / H. Block. // Arkiv for Mat. Astr. och Fysik. — 1912. — Bd.7. — P. 3–20.
2. Cattabriga, L. Potenziale di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple [Text] / L. Cattabriga. // Rendiconti del seminario Matem. della univ. di Padova. — 1961. — Vol. 31.
3. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
4. Арсенин, В. Я. Методы математической физики и специальные функции [Текст] / В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1974. — 432 с.
5. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. — М.: Наука, 1965. — 296 с.
6. Справочник по специальным функциям [Текст] / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана; пер. с англ. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
7. Градштейн, Н. С. Таблицы интегралов, сумма рядов и произведений [Текст] / Н. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 1108 с.