Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Миронов, К методу Римана решения одной смешанной задачи, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 27–32

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu526>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:51:36

УДК 517.956

А. Н. Миронов

К МЕТОДУ РИМАНА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

Для уравнения со старшей частной производной общего вида методом Римана построена формула решения задачи, в которой решение отыскивается в характеристическом параллелепипеде с отсечённым нехарактеристической поверхностью углом, причём на нехарактеристической части границы задаются условия Коши, а на прилегающих к этой части границы характеристиках задаются условия Гурса.

В работе рассматривается уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{\substack{0 \leq q_i \leq m_i, \\ i=1,2,\dots,n}} a_{q_1 q_2 \dots q_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) u_{x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

$a_{m_1 m_2 \dots m_n} \equiv 1$, порядок уравнения (1) равен $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Уравнение (1) можно переписать в виде

$$(L_1 + L_2)u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2)$$

где $L_1 = \partial^m / (\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n})$, $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$, оператор L_2 — линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий лишь производные, получаемые из L_1 отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования. Различные граничные задачи для частных случаев (1) изучались, например, в [1–10].

В статье [11] для уравнения (1) предложен вариант метода Римана решения задачи Коши. Здесь тем же методом строится формула решения задачи, в которой функция u отыскивается в характеристическом параллелепипеде с отсечённым нехарактеристической поверхностью углом. На нехарактеристической части границы задаются условия Коши, а на прилегающих к этой части границы характеристиках задаются условия Гурса (что даёт основание называть такие задачи смешанными). В случае, когда указанная нехарактеристическая поверхность стягивается в точку, из формулы решения смешанной задачи получаем решение задачи Гурса. Подобные задачи рассматривались в работе [12], предметом исследования в которой являлись уравнения вида (2) с оператором

$$L_1 \equiv \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

1. Сначала изложим необходимые предварительные сведения, касающиеся метода Римана [11]. Считаем, что коэффициенты (1) удовлетворяют включениям $a_{q_1 q_2 \dots q_n} \in C^{(q_1, q_2, \dots, q_n)}$, $f \in C$ в замыкании рассматриваемой области E (областью всюду будем называть открытое связное множество). Класс $C^{(q_1, q_2, \dots, q_n)}(\bar{E})$ означает существование и непрерывность всех производных $\partial^{l_1 + l_2 + \dots + l_n} / (\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \dots \partial x_n^{l_n})$, $l_i = 0, 1, \dots, q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, на множестве $\bar{E}$. Введём для (1) функцию Римана $R = R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ как решение интегрального уравнения

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^n \sum_{Q_{k,n}} \int_{\xi_{q_1}}^{x_{q_1}} \int_{\xi_{q_2}}^{x_{q_2}} \dots \int_{\xi_{q_k}}^{x_{q_k}} F_{q_1 q_2 \dots q_k}(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \dots, \alpha_{q_k}) \times \\ \times R(x_1, x_2, \dots, x_{q_1-1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots, x_{q_k-1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_n) d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_2} d\alpha_{q_1} = 1, \quad (3)$$

где вторая сумма берётся по множеству всех упорядоченных наборов индексов $Q_{k,n} = \{(q_1, q_2, \dots, q_k) : 1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_k \leq n\}$,

$$F_{q_1 q_2 \dots q_k}(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \dots, \alpha_{q_k}) = \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{q_1}-1} \sum_{p_{q_2}=0}^{m_{q_2}-1} \dots \sum_{p_{q_k}=0}^{m_{q_k}-1} (-1)^{\sum_{i=1}^k (m_{q_i} - p_{q_i})} a_{p_1 p_2 \dots p_n}(x_1, x_2, \dots, \\ x_{q_1-1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots, x_{q_k-1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_n) \prod_{j=1}^k \frac{(x_{q_j} - \alpha_{q_j})^{m_{q_j} - p_{q_j} - 1}}{(m_{q_j} - p_{q_j} - 1)!},$$

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА. Найти регулярное в D решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \Big|_{S^0} &= u_{0k}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \\ \frac{\partial^{k_i} u}{\partial x_i^{k_i}} \Big|_{\bar{X}_i} &= u_{ik_i}, \quad k_i = 0, 1, \dots, m_i-1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (8)$$

$\vec{n}$ — внешняя нормаль к S ; X_i — грани D при $x_i = x_i^0$. Кроме того, должны выполняться условия согласования $\partial^{k_i} u / \partial x_i^{k_i} \in C\left(S^0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \bar{X}_i\right)\right)$ $k_i = 0, 1, \dots, m_i-1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Считаем, что $u_{0k} \in C^{m-k}(\bar{S}^0)$, $u_{ik_i} \in C^{m-m_i}(\bar{X}_i)$.

Пусть поле направлений $\vec{n}$ задано вектором

$$\vec{n} \left(l_1(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}), \dots, l_n(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}) \right), \quad |\vec{n}| \equiv 1.$$

Введём систему координат, связанную с поверхностью S :

$$x_i = x_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}) + l_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})\mu_n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \mu_n \in \mathbb{R}.$$

Поле направлений $\vec{n}$ не касательно к S , следовательно существует, обратное преобразование координат $\mu_i = \mu_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ класса C^m в окрестности поверхности S [13, стр. 495].

Отметим, что значения u и её производных на S определяются по данным (8), поскольку частные производные решения u на поверхности S по $x_1, \dots, x_n$ находятся дифференцированием $u = U(\mu_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \mu_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$ как сложной функции. Нетрудно заметить, что в силу условий гладкости, налагаемых на поверхность S и данные смешанной задачи, все частные производные на S^0 до порядка $(m-1)$ включительно, входящие в уравнение (1), будут непрерывными функциями.

Решение смешанной задачи существует и единственно, так как заменой

$$v = u_{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}}$$

смешанная задача сводится к интегральному уравнению с частными интегралами относительно функции v , решение которого существует и единственно в классе непрерывных функций. Покажем это. Многообразия $S \cup \bar{X}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) могут быть заданы уравнениями $x_i = \sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Введём интегральный оператор

$$I_j \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{\sigma_j}^{x_j} \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \dots, x_n) d\alpha_j.$$

Тогда

$$u_{x_1^{m_1-k_1} x_2^{m_2-k_2} \dots x_n^{m_n-k_n}} = g(x_1, x_2, \dots, x_n) + I_1^{k_1} I_2^{k_2} \dots I_n^{k_n} v(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (9)$$

где функция $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, очевидно, определяется по известным значениям частных производных функции u на поверхности S . Учтём, что

$$I_j^{k_j} v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{\sigma_j}^{x_j} \frac{(x_j - \alpha_j)^{k_j-1}}{(k_j-1)!} v(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \dots, x_n) d\alpha_j.$$

Подставляя (9) в (1), получим интегральное уравнение относительно функции v :

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^n \sum_{Q_{k,n} \sigma_{q_1} \sigma_{q_2}} \int_{\sigma_{q_1}}^{x_{q_1}} \int_{\sigma_{q_2}}^{x_{q_2}} \dots \int_{\sigma_{q_k}}^{x_{q_k}} \Phi_{q_1 q_2 \dots q_k}(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \dots, \alpha_{q_k}) \times \\ \times v(x_1, x_2, \dots, x_{q_1-1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots, x_{q_k-1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_n) d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_2} d\alpha_{q_1} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

$$\Phi_{q_1 q_2 \dots q_k}(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \dots, \alpha_{q_k}) = \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{q_1}-1} \sum_{p_{q_2}=0}^{m_{q_2}-1} \dots \sum_{p_{q_k}=0}^{m_{q_k}-1} a_{p_1 p_2 \dots p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{j=1}^k \frac{(x_{q_j} - \alpha_{q_j})^{m_{q_j}-p_{q_j}-1}}{(m_{q_j} - p_{q_j} - 1)!},$$

причём если $i \neq q_j$, то $p_i = m_i$. Очевидно, что f_1 — известная непрерывная функция. Это интегральное уравнение Вольтерра (как и приведённое выше уравнение (3)). Доказательство существования и единственности решения этого уравнения можно провести стандартными для уравнений Вольтерра методами [7, стр. 46], [12], [14].

По известной функции v однозначно восстанавливаем функцию u в области D , используя известные значения u и её производных на S^0 . Ясно, что найденная таким образом функция u является регулярным решением уравнения (1).

Перейдём к построению формулы решения смешанной задачи в терминах функции Римана. Проведём через точку $M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ плоскости $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots, x_n = \xi_n$. Они отсекают от D область D^1 , граница которой образована указанными плоскостями, а также частями множеств X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и частью поверхности S , которую обозначим через S^1 (граница D^1 состоит из многообразий размерности $n-1$).

Обозначим X_i^1 — грани D^1 , лежащие в плоскостях $x_i = x_i^0$, P^i — грани D^1 , лежащие в плоскостях $x_i = \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Очевидно, что $P^1, P^2, \dots, P^n$ представляют собой $(n-1)$ -мерные параллелепипеды, причём

$$\partial D^1 = \sum_{i=1}^n X_i^1 + \sum_{i=1}^n P^i + S^1.$$

Ясно, что для решения смешанной задачи достаточно найти значение решения уравнения (1) в точке M . Это достигается путём интегрирования тождества (7) по области D^1 с использованием общей формулы Стокса [15, стр. 246]

$$\int_{D^1} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_{\partial D^1} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} A_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_k. \quad (10)$$

Введём обозначения $Q = \{1, 2, \dots, n\}$, $Q_n^{l, l+k} = \{(q_1, q_2, \dots, q_n) : \{q_j : 1 \leq j \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}, q_1 < q_2 < \dots < q_l, q_{l+1} < q_{l+2} < \dots < q_{l+k}, q_{l+k+1} < q_{l+k+2} < \dots < q_n\}$,

$$B_{q_1} = \sum_{\substack{0 \leq l_{q_i} \leq 1, \\ i=2,3,\dots,n, l_{q_1}=1, \\ p_r \leq m_r, r=1,2,\dots,n}} \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^n p_i}}{\sum_{i=1}^n l_{q_i}} \left(A_{p_1 \dots p_n} u_{x_{q_1}}^{m_{q_1}-p_{q_1}-1} x_{q_2}^{m_{q_2}-p_{q_2}-l_{q_2}} \dots x_{q_n}^{m_{q_n}-p_{q_n}-l_{q_n}} \right)_{x_{q_2}^{l_{q_2}} \dots x_{q_n}^{l_{q_n}}},$$

...

$$B_{q_1 \dots q_k} = \sum_{\substack{0 \leq l_{q_i} \leq 1, \\ i=k+1, k+2, \dots, n, \\ l_{q_j}=1, j=1, 2, \dots, k, \\ p_r \leq m_r, r=1, 2, \dots, n}} \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^n p_i}}{\prod_{j=1}^k \sum_{i=j}^n l_{q_i}} \left(A_{p_1 \dots p_n} u_{x_{q_1}}^{m_{q_1}-p_{q_1}-1} x_{q_2}^{m_{q_2}-p_{q_2}-1} \dots x_{q_k}^{m_{q_k}-p_{q_k}-1} x_{q_{k+1}}^{m_{q_{k+1}}-p_{q_{k+1}}-l_{q_{k+1}}} \dots x_{q_n}^{m_{q_n}-p_{q_n}-l_{q_n}} \right)_{x_{q_{k+1}}^{l_{q_{k+1}}} \dots x_{q_n}^{l_{q_n}}}.$$

Конструкции $B_{q_1 \dots q_k}$, получающиеся перестановкой индексов, совпадают.

Запишем правую часть тождества (7) в дивергентной форме

$$RL(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_i}{\partial x_i}. \quad (11)$$

Пусть u — регулярное решение уравнения (1). Тогда, интегрируя (11) по области D^1 и применяя общую формулу Стокса (10) при $k = n$, получим

$$\int_{D^1} Rf dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\partial D^1} \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n}.$$

Далее, как и при решении задачи Коши [11], заменяем интеграл по множеству ∂D^1 суммой интегралов по его составляющим. Затем интегрируем по параллелепипедам P^i ($i = 1, 2, \dots, n$) с учётом тождеств (5). Окончательно получаем

$$u_{x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \dots x_n^{m_n-1}}(M) = \sum_{s=0}^{n-2} \sum_{Q_n^{s,s+1}} (n-s-1)! \int_{x_{q_1}^0}^{\xi_{q_1}} \dots \int_{x_{q_s}^0}^{\xi_{q_s}} B_{q_{s+1} \dots q_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \Big|_{x_{q_{s+1}}=x_{q_{s+1}}^0} \Big|_{x_{q_{s+2}}=\xi_{q_{s+2}}} \dots \Big|_{x_{q_n}=\xi_{q_n}} dx_{q_s} \dots \\ \dots dx_{q_1} - \sum_{Q_n^1} (-1)^{q_1-1} \int_{x_{q_1}^1+S^1} B_{q_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n} + \int_{D^1} Rf dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (12)$$

Правая часть формулы (12) известна. Интегрируя формулу (12) по области D^1 , получим $u(M)$.

3. Рассмотрим применение изложенной выше схемы решения смешанной задачи в трёхмерном пространстве ($n=3$).

В данном случае D представляет собой характеристический параллелепипед в пространстве (x_1, x_2, x_3) , образованный при пересечении плоскостей $x_1 = x_1^0$, $x_1 = x_1^1$, $x_2 = x_2^0$, $x_2 = x_2^1$, $x_3 = x_3^0$, $x_3 = x_3^1$, усечённый нехарактеристической поверхностью S (задана уравнением $x_3 = s(x_1, x_2)$, $s'_{x_1} < 0$, $s'_{x_2} < 0$) класса C^m со стороны угла (x_1^0, x_2^0, x_3^0) .

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА. Найти регулярное в D решение уравнения (1) при $n=3$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \right|_S = u_{0k}, \quad k=0, 1, \dots, m-1, \\ \left. \frac{\partial^{k_i} u}{\partial x_i^{k_i}} \right|_{\bar{X}_i} = u_{ik_i}, \quad k_i=0, 1, \dots, m_i-1, \quad i=1, 2, 3, \quad (13)$$

$\bar{n}$ — внешняя нормаль к S , X_i — грани D при $x_i = x_i^0$. Кроме того, выполняются условия согласования $\partial^{k_i} u / \partial x_i^{k_i} \in C\left(S^0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \bar{X}_i\right)\right)$ $k_i=0, 1, \dots, m_i-1$ ($i=1, 2, 3$). Считаем, что $u_{0k} \in C^{m-k}(\bar{S})$, $u_{ik_i} \in C^{m-m_i}(\bar{X}_i)$.

Проведём через точку $M(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ плоскости $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$. Эти плоскости отсекают от D область D^1 , граница которой состоит из двумерных многообразий $AEPFB$ (часть плоскости $x_1 = x_1^0$), $CGQEA$ ($x_2 = x_2^0$), $CBFTG$ ($x_3 = x_3^0$), $GTMQ$ ($x_1 = \xi_1$), $FPMT$ ($x_2 = \xi_2$), $EQMP$ ($x_3 = \xi_3$) и ABC (часть поверхности S).

Положим в (7) $R = R(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и запишем правую часть тождества (7) в дивергентной форме

$$RL(u) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_i}{\partial x_i}. \quad (14)$$

Пусть u — решение уравнения (1) при $n=3$. Тогда, интегрируя (14) по области D^1 и применяя формулы Гаусса-Остроградского и Грина [15, стр. 236, 241], получим

$$u_{x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} x_3^{m_3-1}}(M) = 2B_{123}(P) + 2B_{123}(Q) + 2B_{123}(T) - \int_{PF+QG} B_{12} dx_3 - \int_{PE+TG} B_{13} dx_2 - \int_{TF+QE} B_{23} dx_1 - \\ - \iint_{AEPFB} B_1 dx_2 \wedge dx_3 - \iint_{CGQEA} B_2 dx_3 \wedge dx_1 - \iint_{CBFTG} B_3 dx_1 \wedge dx_2 - \\ - \iint_{ABC} B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2 + \iiint_{D^1} RL(u) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (15)$$

При записи (15) учтены тождества (5).

Формулу (15) можно переписать в виде

$$u_{x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} x_3^{m_3-1}}(M) = \Phi(M), \quad (16)$$

где функция $\Phi(M)$ содержит значения u и её производных на S и X_i ($i = 1, 2, 3$). Эти значения могут быть определены из (13). Интегрируя формулу (16) с известной $\Phi(M)$ по области D^1 получим $u(M)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Солдатов, А. П. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка [Текст] / А. П. Солдатов, М. Х. Шхануков // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 297, № 3. — С. 547–552.
2. Жегалов, В. И. Задача Гурса в четырёхмерном пространстве [Текст] / В. И. Жегалов, В. А. Севастьянов // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 10. — С. 1429–1430.
3. Севастьянов, В. А. Метод Римана для трёхмерного гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / В. А. Севастьянов // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 5. — С. 69–73.
4. Севастьянов, В. А. Об одном случае задачи Коши [Текст] / В. А. Севастьянов // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 12. — С. 1706–1707.
5. Жегалов, В. И. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка [Текст] / В. И. Жегалов, Е. А. Уткина // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 10. — С. 73–76.
6. Жегалов, В. И. Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной [Текст] / В. И. Жегалов, Е. А. Уткина. // Изв. вузов. Математика. — 2001. — № 11. — С. 77–81.
7. Жегалов, В. И. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными [Текст] / В. И. Жегалов, А. Н. Миронов. — Казань: Казан. мат. об-во, 2001. — 226 с.
8. Жегалов, В. И. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных [Текст] / В. И. Жегалов, А. Н. Миронов // Изв. вузов. Математика. — 2002. — № 5. — С. 23–30.
9. Жегалов, В. И. Об одном уравнении в частных производных четвёртого порядка с тремя независимыми переменными [Текст] / В. И. Жегалов, Е. А. Уткина // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 1. — С. 93–97.
10. Миронов, А. Н. О методе Римана решения задачи Коши [Текст] / А. Н. Миронов // Изв. вузов. Математика. — 2005. — № 2. — С. 34–44.
11. Миронов, А. Н. Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}^n$ [Текст] / А. Н. Миронов // Сиб. мат. ж. — 2006. — Т. 47, № 3. — С. 584–594.
12. Севастьянов, В. А. Вариант метода Римана для одного дифференциального уравнения в n -мерном евклидовом пространстве [Текст] / В. А. Севастьянов: Дисс. . . . канд. физ.-мат. наук. — Казань, 1997. — 127 с.
13. Зорич, В. А. Математический анализ [Текст]: в 2 ч. / В. А. Зорич. — М.: Наука, 1981. — Ч. 1. — 544 с.
14. Севастьянов, В. А. Существование и единственность решения одного многомерного интегрального уравнения [Текст] / В. А. Севастьянов. — Казань: Казан. ун-т, 1997. — 6 с. — Деп. в ВИНТИ 05.06.97. — № 1848–В97.
15. Зорич, В. А. Математический анализ [Текст]: в 2 ч. / В. А. Зорич. — М.: Наука, 1984. — Ч. 2. — 640 с.