Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Арланова, Нелокальная задача с дробными производными для одного гиперболического уравнения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 33–36

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:35:48

УДК 517.956

Е. Ю. Арланова

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Поставлена и исследована нелокальная краевая задача с операторами дробного интегро-дифференцирования для одного частного случая уравнения влагопереноса. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

Рассмотрим вырождающееся гиперболическое уравнение

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + bu_x = 0, \quad |b| \leq 1, \quad (1)$$

которое принято называть уравнением Бицадзе—Лыкова или уравнением влагопереноса [1, 2], в области D , ограниченной интервалом $J = (0, 1)$ и характеристиками $AC = \left\{ (x, y) : x - \frac{y^2}{2} = 0, y \leq 0 \right\}$, $BC = \left\{ (x, y) : x + \frac{y^2}{2} = 1, y \leq 0 \right\}$ уравнения (1).

В работе [3] рассматривалась краевая задача для этого уравнения при $b = 1$. Продолжим эти исследования, рассмотрев задачу при $b = -1$.

Введём следующие обозначения: $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in J$, с характеристиками AC и BC соответственно: $\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, \sqrt{x} \right)$, $\Theta_1(x) = \left(\frac{x+1}{2}, \sqrt{1-x} \right)$; $\left(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f \right)(x)$ — оператор Сайго, введенный в [4]; $\left(I_{0+}^{\alpha} f \right)(x)$ — дробный интеграл, $\left(D_{0+}^{\alpha} f \right)(x)$ — дробная производная Римана—Лиувилля [2, 5].

В дальнейшем нам потребуются некоторые утверждения из [5] и [6].

Для удобства чтения приведём их формулировки.

ЛЕММА 1. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1$, $\lambda + \alpha < 1$ и $\rho(x) = x^{\mu}$, где $0 \leq \mu < \lambda + 1$. Если $\varphi(x) \in H_0^{\lambda}(\rho; [0, 1])$, то $\left(I_{0+}^{\alpha} \varphi \right)(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho; [0, 1])$.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \alpha < \lambda < 1$, $\lambda - \alpha < 1$ и $\rho(x) = x^{\mu}$, где $0 \leq \mu < \lambda - \alpha + 1$. Если $\varphi(x) \in H_0^{\lambda}(\rho; [0, 1])$, то $\left(D_{0+}^{\alpha} \varphi \right)(x) \in H_0^{\lambda-\alpha}(\rho; [0, 1])$.

ЛЕММА 3. Пусть $0 < -\alpha < \lambda \leq 1$ и $\beta < \min[0, \eta + 1]$. Если $\varphi(x) \in H^{\lambda}(\bar{J})$, то $\left(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi \right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi \right)(x) \in H^{\min[\alpha+\lambda, -\beta]}(\bar{J})$.

ЛЕММА 4. Пусть $0 < -\alpha < \lambda \leq 1$ и $\eta > \beta - 1$. Если $\varphi(x) \in H^{\lambda}(\bar{J})$, то $x^{\beta} \left(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi \right)(x)$, $(1-x)^{\beta} \left(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi \right)(x) \in H^{\alpha+\lambda}(\bar{J})$.

Для уравнения (1) при $b = -1$ исследуем следующую краевую задачу.

ЗАДАЧА. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) при $b = -1$ в области D и краевым условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \tau(x) \quad (x \in [0, 1]), \\ A \left(D_{0+}^{\alpha} u \left[\Theta_0(t) \right] \right)(x) + B \left(I_{1-}^{\frac{1}{2}-\alpha, \beta, \alpha-1} u \left[\Theta_1(t) \right] \right)(x) &= g(x) \quad (x \in (0, 1)), \end{aligned} \quad (2)$$

где A , B , α , β — ненулевые вещественные константы, удовлетворяющие неравенствам:

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad \beta < 0, \quad \alpha - \beta > 1, \quad (3)$$

$\tau(x)$ и $g(x)$ — известные функции, причём

$$\begin{aligned} \tau(0) &= 0, \quad \tau(x) \in H^{\lambda_1}[0, 1] \cap C^2(0, 1), \quad g(x) \in H^{\lambda_2}[0, 1] \cap C^2(0, 1), \\ \alpha - \frac{1}{2} &< \lambda_1 \leq 1, \quad 1 - \alpha < \lambda_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Будем искать решение задачи в классе таких функций $u(x, y)$, что

$$\lim_{y \rightarrow 0-} u_y(x, y) = v(x) \in H^{\lambda}[0, 1], \quad 0 < \lambda < \alpha, \quad \lambda + \alpha > 1. \quad (5)$$

Используя решение задачи Коши [1]

$$u(x, y) = \tau \left(x - \frac{y^2}{2} \right) - \frac{y}{2} \int_0^1 v \left[x + \frac{y^2}{2} (1-2t) \right] \frac{dt}{\sqrt{1-t}}, \quad (6)$$

найдем

$$u[\Theta_0(x)] = \frac{1}{2} \left(I_{0+}^1 t^{-\frac{1}{2}} v(t) \right) (x), \quad u[\Theta_1(x)] = \tau(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(I_{1-}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} v(t) \right) (x). \quad (7)$$

Согласно

$$\left(D_{0+}^\alpha I_{0+}^\beta f \right) (x) = \left(I_{0+}^{\beta-\alpha} f \right) (x) \quad (0 < \alpha < \beta), \quad (8)$$

$$\left(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \left(I_{0+}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta} \varphi \right) (t) \right) (x) = \left(I_{0+}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta} \varphi \right) (x) \quad (9)$$

имеем

$$\left(D_{0+}^\alpha I_{0+}^1 t^{-\frac{1}{2}} v \right) (x) = \left(I_{0+}^{1-\alpha} t^{-\frac{1}{2}} v \right) (x), \quad (10)$$

$$\left(I_{1-}^{\frac{1}{2}-\alpha, \beta, \alpha-1} I_{1-}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} v \right) (x) = \left(I_{1-}^{1-\alpha, \beta-\frac{1}{2}, \alpha-1} v \right) (x). \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) справедливы для $v(x) \in H_0^\lambda[0, 1]$ с $0 < \lambda < \alpha$. Отметим, что дробные интегралы $\left(I_{0+}^{1-\alpha} t^{-\frac{1}{2}} v \right) (x)$ и $\left(I_{1-}^{1-\alpha, \beta-\frac{1}{2}, \alpha-1} v \right) (x)$ также являются гельдеровскими функциями. Действительно, если $v(x) \in H_0^\lambda[0, 1]$, то, вводя обозначение $v_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} v(x)$, получим $v(x) = x^{\frac{1}{2}} v_1(x) \in H_0^\lambda[0, 1]$, значит $v_1(x) \in H_0^\lambda(\rho; [0, 1])$, $\rho = x^{\frac{1}{2}}$. Тогда согласно лемме 1 при $0 < \lambda < \alpha$ и $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ имеем

$$\left(I_{0+}^{1-\alpha} t^{-\frac{1}{2}} v \right) (x) = \left(I_{0+}^{1-\alpha} v_1 \right) (x) \in H_0^{\lambda+1-\alpha}(\rho; [0, 1]).$$

Далее, вводя обозначение

$$v_2(x) = \left(I_{1-}^{1, -\frac{1}{2}, -1} v \right) (x) = \int_x^1 \frac{v(t) dt}{\sqrt{1-t}} \in H^1[0, 1]$$

и принимая во внимание условия $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ и $\beta < 0$, согласно лемме 3 получаем

$$\left(I_{1-}^{-\alpha, \beta, \alpha-1} v_2 \right) (x) = \left(I_{1-}^{1-\alpha, \beta-\frac{1}{2}, \alpha-1} v \right) (x) \in H^{\lambda_3}[0, 1],$$

где $\lambda_3 = \min[1-\alpha, -\beta]$.

Подставляя выражения (7) во второе условие (2), с учётом формул (8) и (9) получим

$$A \left(I_{0+}^{1-\alpha} t^{-\frac{1}{2}} v(t) \right) (x) + \sqrt{\pi} B \left(I_{1-}^{1-\alpha, \beta-\frac{1}{2}, \alpha-1} v(t) \right) (x) = 2g(x) - 2B \left(I_{1-}^{\frac{1}{2}-\alpha, \beta, \alpha-1} \tau(t) \right) (x). \quad (12)$$

Если $v_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} v(x) \in H_0^\lambda(\rho; [0, 1])$, $\rho(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $0 < 1-\alpha < \lambda < 1$, $\lambda-1+\alpha < 1$, $\frac{1}{2} < \lambda+\alpha$, то на основании равенства $\left(I_{0+}^{1-\alpha} v_1 \right)^{-1}(x) = \left(D_{0+}^{1-\alpha} v_1 \right) (x)$ и леммы 2 имеем

$$\left(D_{0+}^{1-\alpha} v_1 \right) (x) \in H_0^{\lambda-1+\alpha}(\rho; [0, 1]).$$

Если же $\tau(x) \in H^{\lambda_1}[0, 1]$, $0 < \alpha - \frac{1}{2} < \lambda_1 \leq 1$, $\beta < \min[0, \alpha] = 0$, то в силу леммы 3

$$\left(I_{1-}^{\frac{1}{2}-\alpha, \beta, \alpha-1} \tau \right) (x) \in H^{\lambda_3}[0, 1],$$

где $\lambda_3 = \min\left[\frac{1}{2} - \alpha + \lambda, -\beta\right]$. Так как $0 < 1 - \alpha < \lambda_3 \leq 1$, то на основании леммы 4

$$x^{1-\alpha} \left(D_{0+}^{1-\alpha} I_{1-}^{\frac{1}{2}-\alpha, \beta, \alpha-1} \tau \right) = x^{1-\alpha} \left(I_{0+}^{\alpha-1, 1-\alpha, \eta} I_{1-}^{\frac{1}{2}-\alpha, \beta, \alpha-1} \tau \right) \in H^{\alpha-1+\lambda_3}[0, 1]. \quad (13)$$

Применяя к обеим частям (12) оператор $D_{0+}^{1-\alpha}$ и учитывая (8), приходим к равенству

$$Ax^{-\frac{1}{2}}v(x) + \sqrt{\pi}B \left(D_{0+}^{1-\alpha} I_{1-}^{1-\alpha, \beta-\frac{1}{2}, \alpha-1} v(t) \right)(x) = 2 \left(D_{0+}^{1-\alpha} g(t) \right)(x) - 2B \left(D_{0+}^{1-\alpha} I_{1-}^{\frac{1}{2}-\alpha, \beta, \alpha-1} \tau(t) \right)(x)$$

или, согласно $(D_{0+}^{\alpha} \varphi)(x) = (I_{0+}^{-\alpha, \alpha, \eta} \varphi)(x)$, можно записать

$$Ax^{-\frac{1}{2}}v(x) + \sqrt{\pi}B \left(I_{0+}^{\alpha-1, 1-\alpha, \eta} I_{1-}^{1-\alpha, \beta-\frac{1}{2}, \alpha-1} v(t) \right)(x) = 2 \left(D_{0+}^{1-\alpha} g(t) \right)(x) - 2B \left(D_{0+}^{1-\alpha} I_{1-}^{\frac{1}{2}-\alpha, \beta, \alpha-1} \tau(t) \right)(x). \quad (14)$$

Используя формулу [7]

$$\left(I_{0+}^{-\alpha, \alpha, \eta} \left(I_{1-}^{\alpha, \beta, -\alpha} \varphi \right) (t) \right) (x) = \frac{\cos(\pi\alpha)\varphi(x)}{(1-x)^{\alpha+\beta}} + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{x} \right)^{\alpha} \frac{\varphi(t)dt}{(1-t)^{\alpha+\beta}(t-x)}, \quad (15)$$

перепишем (14) в виде особого интегрального уравнения с ядром Коши:

$$\begin{aligned} & \left[A - \sqrt{\pi}B \cos(\pi\alpha) x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} \right] v(x) - \\ & - \frac{\sqrt{\pi}B \sin(\pi\alpha) x^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{x} \right)^{1-\alpha} \frac{v(t)dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}-\alpha+\beta}(t-x)} = \\ & = 2x^{\frac{1}{2}} \left[\left(D_{0+}^{1-\alpha} g(t) \right) - B \left(D_{0+}^{1-\alpha} I_{1-}^{\frac{1}{2}-\alpha, \beta, \alpha-1} \tau(t) \right)(x) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Произведя в (16) замены

$$\begin{aligned} \mu(x) &= x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} v(x); \\ \gamma_1(x) &= A - \sqrt{\pi}B \cos(\pi\alpha) x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}}, \quad \gamma_2(x) = -\sqrt{\pi}B \sin(\pi\alpha) x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}}; \\ f(x) &= 2x^{\frac{3}{2}-\alpha} (1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} \left[\left(D_{0+}^{1-\alpha} g(t) \right) - B \left(D_{0+}^{1-\alpha} I_{1-}^{\frac{1}{2}-\alpha, \beta, \alpha-1} \tau(t) \right)(x) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

получим характеристическое особое интегральное уравнение с ядром Коши [8]

$$\gamma_1(x)\mu(x) + \frac{\gamma_2(x)}{\pi} \int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{t-x} = f(x). \quad (18)$$

Таким образом, однозначная разрешимость исследуемой задачи сводится к вопросу разрешимости уравнения (18).

Для выяснения гладкости функций $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$, $f(x)$ воспользуемся леммами 1–4.

В силу неравенства $\alpha - \beta - \frac{1}{2} > 0$ функции $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ дифференцируемы, а поскольку $g(x) \in H^{\lambda_2}[0, 1]$, $0 < 1 - \alpha < \lambda_2 \leq 1$, то из леммы 4 следует

$$x^{1-\alpha} \left(D_{0+}^{1-\alpha} g \right)(x) = x^{1-\alpha} \left(I_{0+}^{\alpha-1, 1-\alpha, \eta} g \right)(x) \in H^{\alpha-1+\lambda_2}[0, 1]. \quad (19)$$

Тогда согласно (13) и (19) функция $f(x)$ в (18) удовлетворяет условию

$$f(x) \in H^{\lambda_4}[0, 1], \quad \lambda_4 = \min \left[\frac{1}{2}, \alpha - \beta - \frac{1}{2}, \alpha - 1 + \lambda_3, \alpha - 1 + \lambda_2 \right].$$

Так как

$$\gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0, \quad (20)$$

то уравнение (18) является уравнением нормального типа. Используя теорию сингулярных уравнений [5, 8, 9], выпишем единственное решение этого уравнения.

Составим функцию $G(x)$:

$$G(x) = \frac{\gamma_1(x) - i\gamma_2(x)}{\gamma_1(x) + i\gamma_2(x)} = \frac{A - \sqrt{\pi}B \cos(\pi\alpha)x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} + i\sqrt{\pi}B \sin(\pi\alpha)x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}}}{A - \sqrt{\pi}B \cos(\pi\alpha)x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} - i\sqrt{\pi}B \sin(\pi\alpha)x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{A - \sqrt{\pi}B x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} e^{-i\pi\alpha}}{A - \sqrt{\pi}B x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} e^{i\pi\alpha}} = e^{i\Theta(x)},$$

где $\Theta(x) = \arg[G(x)]$. Тогда $G(0) = 1$, $\Theta(0) = 0$, $G(1) = 1$, $\Theta(1) = 0$.

Будем искать решение интегрального уравнения (18) в весовом классе гильбертовских функций $H_0^\lambda \left(x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}}; [0, 1] \right)$, неограниченных при $x=0$ и ограниченных при $x=1$. Тогда $n_0 = 1$, $n_1 = 0$ и индекс χ уравнения (18) равен нулю:

$$\chi = \left[\frac{\Theta(1)}{2\pi} \right] + n_0 + n_1 - 1 = 0.$$

Далее $\mu_0 = 1 - n_0 - \frac{\Theta(0)}{2\pi} = 0$, $\mu_1 = \frac{\Theta(1)}{2\pi} - \left[\frac{\Theta(1)}{2\pi} \right] - n_1 = 0$ и $Z_0 = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\Theta(t) dt}{t-x} \right)$.

Тогда уравнение (18) имеет единственное решение

$$\mu(x) = \frac{\gamma_1(x)f(x)}{\gamma(x)} - \frac{\gamma_2(x)Z_0(x)}{\pi\gamma(x)} \int_0^1 \frac{f(t)dt}{Z_0(t)(t-x)}.$$

Произведя обратную замену $v(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha+\beta}\mu(x)$, мы находим $v(x)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть действительные константы α и β удовлетворяют условию (3), функции $\tau(x)$ и $g(x)$ — условию (4). Тогда задача (2) для уравнения (1) при $b = -1$ имеет единственное решение, определяемое формулой решения задачи Коши (6), где $v(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha+\beta}\mu(x)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бицадзе, А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
2. Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии [Текст] / А. М. Нахушев. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.
3. Килбас, А. А. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с дробными производными в краевом условии [Текст] / А. А. Килбас, О. А. Репин, М. Сайго / В сб.: Неклассич. уравнения мат. физики. — Новосибирск, 2002. — С. 88–95.
4. Saigo, M. A certain boundary value problem for the euler-poisson-darboux equation [Text] / M. Saigo // Math. Japan, 1979. — Vol. 24, No. 4. — P. 377–385.
5. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения [Текст] / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Мн.: Наука и техника, 1987. — 688 с.
6. Saigo, M. Generalized fractional integrals and derivatives in holder spaces [Text] / M. Saigo, A. A. Kilbas / Transform Methods and Special Functions, Sofia 94: Proc. of Intern. Workshop. — Singapore: Sci. Cult. Publ., 1995. — P. 282–293.
7. Srivastava, H. M. Multiplication of fractional calculus operators and boundary value problems involving the euler-darboux equation [Text] / H. M. Srivastava, M. Saigo // J. Math. Anal. Appl., 1987. — Vol. 121 — P. 325–369.
8. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи [Текст] / Ф. Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
9. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. — М.: Наука, 1968. — 511 с.