Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. К. Юлдашев, Ж. А. Артыкова, Общее функционально-интегральное уравнение Вольтерра, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 37–40

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 11:12:17

УДК 517.91

Т. К. Юлдашев, Ж. А. Артыкова

ОБЩЕЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА

Изучается однозначная разрешимость интегрального уравнения Вольтерра общего вида при заданном начальном условии. Доказывается теорема о существовании и единственности непрерывного решения уравнения, удовлетворяющего условию Липшица на рассматриваемом отрезке. При этом применяется метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений.

В настоящей работе рассматривается нелинейное интегральное уравнение вида

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} K(t, s) u(s) ds = f\left(t, u[u(t)]\right), \quad t \in T_1, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(t) = g(t), \quad t \in E_0 = [t_0; t_1], \quad (*)$$

где $K(t, s) \in C(T_0^2)$, $0 \leq K(t) \equiv K(t, t)$, $f\left(t, u[u(t)]\right) \in C(T_1 \times X)$, $T_0^2 \equiv T_0 \times T_0$, $T_1 \equiv [t_1; T]$, $T_0 \equiv [t_0; T]$, $0 < t_0 < T < \infty$, $t_0 < t_1$, X — ограниченное в $\mathbb{R}$, $t_0 \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq T$, $\alpha(t)$ и $\beta(t) \in C(T_0)$, $\alpha'(t) > 0$, $\beta'(t) > 0$, $g(t) \in C(E_0)$.

Для дальнейшего изложения сути данной работы примем следующие обозначения: $C(D)$ — пространство непрерывных функций по всем аргументам в области $D \subset \mathbb{R}$; $\text{Bnd}(M)$ — класс функций, ограниченных по норме числом M ; $\text{Lip}(L|_{u,v,\dots})$ — класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u, v, \dots$ с коэффициентом L , а для функции одной переменной индекс будем опускать. В качестве нормы для произвольной непрерывной функции $x(t) \in X$ берём евклидову норму на числовой оси:

$$\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in T_1\}.$$

Изучаются существование и единственность решения уравнения (1) при начальном условии (*) на отрезке T_1 . При этом применяется метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Здесь следует подчеркнуть, что решение $u(t) \in X_1$ уравнения (1) рассматривается в классе непрерывных функций, удовлетворяющих условию Липшица на отрезке T_1 с коэффициентом L_2 , т. е.

$$\|u(t) - u(s)\| \leq L_2 |\varphi(t, s)|.$$

Здесь X_1 — ограниченное замкнутое множество.

Отметим, что общее интегральное уравнение Вольтерра впервые рассматривалось в работах [1–3]. Настоящая работа является дальнейшим развитием этих работ.

Уравнение (1) запишем в виде

$$u(t) + \int_{t_0}^t K(s) u(s) ds = - \int_{t_0}^t [K(t, s) - K(s)] u(s) ds + f_0(t, u), \quad t \in T_1,$$

где

$$f_0(t, u) \equiv \int_t^{\alpha(t)} K(t, s) u(s) ds + \int_{\beta(t)}^t K(t, s) u(s) ds + u(t) + f\left(t, u[u(t)]\right).$$

Отсюда, используя резольвенту ядра $[-K(s)]$, имеем

$$u(t) = - \int_{t_0}^t [K(t, s) - K(s)] u(s) ds + f_0(t, u(t)) + \\ + \int_{t_0}^t K(s) \exp(-\varphi(t, s)) \left[-f_0(s, u(s)) + \int_{t_0}^s [K(s, \tau) - K(\tau)] u(\tau) d\tau \right] ds, \quad t \in T_1, \quad (2)$$

где $\varphi(t, s) = \int_s^t K(\tau) d\tau$, $\varphi(t, t_0) = \varphi(t)$, $\varphi(t_1) > 0$.

Применяя к (2) формулу Дирихле, получаем

$$u(t) = \int_{t_0}^t H(t, s) u(s) ds + f_0(t, u(t)) \exp(-\varphi(t)) + \int_{t_0}^t K(s) \exp(-\varphi(t, s)) [f_0(t, u(t)) - f_0(s, u(s))] ds, \quad t \in T_1, \quad (3)$$

где

$$H(t, s) \equiv -[K(t, s) - K(s)] \exp(-\varphi(t, s)) - \int_s^t K(\tau) \exp(-\varphi(t, \tau)) [K(t, s) - K(\tau, s)] d\tau.$$

Уравнения (1)–(3) являются эквивалентными.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) $|K(\tau, s) - K(\eta, t)| \leq L_1(s)\varphi(\tau, \eta)$, $\tau \geq \eta$, $0 \leq L_1(s)$;
- 2) $f(\tau, u) \in \text{Bnd}(M) \cap \text{Lip}(L_3|_u)$, $0 < M$, $L_3 = \text{const}$;
- 3) $|\varphi(t, s)| \leq L_4|t - s|$, $0 \leq L_4 = \text{const}$;
- 4) для всех $t \in T_1$ справедлива оценка $\rho(t) < 1$, т. е.

$$\rho = \int_{t_0}^t \|L_1(s)\| ds + (1 + \Delta_1 + L_3 + L_2 L_3 L_4) \left(\exp(-\varphi(t)) + 2 \int_{t_0}^t \|K(s)\| \exp(-\varphi(t, s)) ds \right) < 1,$$

где $\Delta_1 = \int_{t_0}^{\alpha(t)} \|K(t, s)\| ds + \int_{\beta(t)}^t \|K(t, s)\| ds$, $0 \leq L_2 = \text{const}$.

Тогда уравнение (1) при начальном условии (*) имеет единственное непрерывное решение $u(t) \in X_1$, удовлетворяющее условию Липшица на отрезке T_1 .

Доказательство. Используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. При этом итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} u_0(t) = g(t), & t \in E_0, \\ u_0(t) = f(t, 0) \exp(-\varphi(t)) + \int_{t_0}^t K(s) \exp(-\varphi(t, s)) [f(t, 0) - f(s, 0)] ds, & t \in T_1, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} u_{k+1}(t) = g(t), & t \in E_0, \\ u_{k+1}(t) = \int_{t_0}^t H(t, s) u_k(s) ds + f_0(t, u_k(t)) \exp(-\varphi(t)) \times \\ \times \int_{t_0}^t K(s) \exp(-\varphi(t, s)) [f_0(t, u_k(t)) - f_0(s, u_k(s))] ds, & k = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in T_1, \end{cases} \quad (5)$$

С учётом второго условия теоремы из (4) получаем

$$\|u_0(t)\| \leq M \exp(-\varphi(t)) + \Delta_0 \int_{t_0}^t \|K(s)\| \exp(-\varphi(t, s)) ds, \quad t \in T_1, \quad (6)$$

где $\Delta_0 = \sup \{|f(t, 0) - f(s, 0)| : (t, s) \in T_1^2\}$.

В силу условий теоремы для произвольного неотрицательного целого числа k из (5) имеем

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| &\leq \int_{t_0}^t |H(t, s)| \|u_k(s) - u_{k-1}(s)\| ds + \\ &+ \left[(1 + \Delta_1) \|u_k(t) - u_{k-1}(t)\| + L_3 \|u_k[u_k(t)] - u_{k-1}[u_{k-1}(t)]\| \right] \exp(-\varphi(t)) + \\ &+ \int_{t_0}^t \|K(s)\| \exp(-\varphi(t, s)) \left\{ (1 + \Delta_1) \|u_k(t) - u_{k-1}(t)\| + \left(1 + \int_{t_0}^{\alpha(s)} \|K(s, \tau)\| d\tau + \int_{\beta(s)}^s \|K(s, \tau)\| d\tau \right) \|u_k(s) - u_{k-1}(s)\| + \right. \\ &\left. + L_3 \left[\|u_k[u_k(t)] - u_{k-1}[u_{k-1}(t)]\| + \|u_k[u_k(s)] - u_{k-1}[u_{k-1}(s)]\| \right] \right\} ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in T_1. \quad (7) \end{aligned}$$

Так как в силу первого условия теоремы справедлива оценка

$$|H(t, s)| \leq L_1(s) \left[\varphi(t, s) \exp(-\varphi(t, s)) + \int_s^t K(\tau) \varphi(t, \tau) \exp(-\varphi(t, \tau)) d\tau \right] \leq L_1(t), \quad t \in T_1,$$

то из (7) получаем

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|L_1(s)\| \cdot \|u_k(s) - u_{k-1}(s)\| ds + \\ &+ \left[(1 + \Delta_1 + L_3) \|u_k(t) - u_{k-1}(t)\| + L_2 L_3 \varphi(u_k(t), u_{k-1}(t)) \right] \exp(-\varphi(t)) + \\ &+ 2 \int_{t_0}^t \|K(s)\| \exp(-\varphi(t, s)) \left[(1 + \Delta_1 + L_3) \|u_k(t) - u_{k-1}(t)\| + \right. \\ &\left. + L_2 L_3 \varphi(u_k(t), u_{k-1}(t)) \right] ds, \quad 0 \leq L_2 = \text{const}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in T_1. \quad (8) \end{aligned}$$

В силу третьего условия теоремы из (8) имеем

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| \leq \rho \|u_k(t) - u_{k-1}(t)\|, \quad t \in T_1. \quad (9)$$

Из четвёртого условия теоремы и оценок (6) и (9) следует, что оператор в правой части (3) является сжимающим. Следовательно, согласно принципу Шаудера о неподвижной точке существует единственное решение уравнения (1) с начальным условием (*) на отрезке T_1 . $\square$

Приведём два примера, где выполняются условия теоремы. В качестве первого примера рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left[1 - \frac{n - \alpha + 1}{n + 1} \frac{(t - t_1)^\alpha}{(s - t_1)^\alpha} \right] u(s) ds &= \left[-\frac{(t_1 - t_0)^2}{2} + \frac{n - \alpha + 1}{n + 1} (t - t_1)^\alpha \frac{(t_0 - t_1)^{2-\alpha}}{2 - \alpha} \right] \times \\ &\times [1 - (t - t_1)^n + u(t)], \quad t \in T_1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad n \geq T - t_1 \quad (10) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$u(t) = t - t_1, \quad t \in E_0. \quad (11)$$

Решение уравнения (10) при начальном условии (11) выглядит так:

$$u(t) = (t - t_1)^n.$$

Второй пример. Рассмотрим уравнение

$$\int_1^t t s u(s) ds = t \left(1 + \sqrt{t^4 - u[u(t)]} \right) \ln t, \quad t \in [1, T], \quad T < \infty,$$

которое при начальном условии

$$u(t) = t^4, \quad t \in E_0 \equiv \left[\frac{1}{T^2}; 1 \right]$$

имеет следующее решение:

$$u(t) = \frac{1}{t^2}, \quad t \in [1; T].$$

Это решение ограничено:

$$\frac{1}{T^2} \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [1, T] \quad \text{и} \quad 1 \leq u(t) \leq T^4, \quad t \in E_0.$$

Отсюда имеем, что

$$\frac{1}{T^2} \leq u(t) \leq T^4, \quad t \in E_0 \cup [1; T].$$

Следовательно, $X = \left[\frac{1}{T^2}; T^4 \right]$, а правая часть уравнения непрерывно по t и ограничено на отрезке $[1; T]$:

$$0 \leq t \left(1 + \sqrt{t^4 - u[u(t)]} \right) \leq T.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юлдашев, Т. К. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода с нелинейной правой частью [Текст] / Т. К. Юлдашев, Ж. А. Артыкова // Сложні системи і процеси. — 2005. — № 1(7). — С. 3–5.
2. Юлдашев, Т. К. Случайные интегральные уравнения Вольтерра первого рода с нелинейной правой частью [Текст] / Т. К. Юлдашев, Ж. А. Артыкова / Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения: Материалы V-й междунаро. Ферган. конф. (Фергана, 10–12 мая 2005 г.). — Ташкент: ИМ АН РУзб, 2005. — С. 204–206.
3. Юлдашев, Т. К. Интегральные уравнение Вольтерра первого рода с нелинейной правой частью и сложным отклонением [Текст] / Т. К. Юлдашев, Ж. А. Артыкова / Геометрия в Одессе—2005. Дифференц. геометрия и её приложения: Тез. междунаро. семинара (23–29 мая 2005 г.). — Одесса, 2005. — С. 112–113.

Кыргызская государственная юридическая академия,
Ошский государственный университет г. Ош
tursunbay@rambler.ru

Поступила 26.03.2007