Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский, Равнонапряженное армирование металлокомпозитных пластин по направлениям главных напряжений в условиях установившейся ползучести, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 41–50

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 02:11:08

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

РАВНОНАПРЯЖЁННОЕ АРМИРОВАНИЕ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Сформулирована задача равнонапряжённого армирования металлокомпозитных пластин по направлениям главных напряжений и скоростей деформаций, нагруженных в своей плоскости и работающих в условиях установившейся ползучести. Проведён качественный анализ системы разрешающих уравнений. Разработан полубратный метод решения поставленной задачи при статических граничных условиях. Получены рациональные проекты армирования для бесконечной сжимаемой пластины с круговым отверстием и для кольцевых пластин, нагруженных на контурах радиальными и окружными нагрузками. Проанализированы результаты расчётов таких конструкций. Показано, что рассматриваемая обратная задача при заданной геометрии пластины и нагрузках обладает совокупностью решений, на множестве которых можно осуществлять целевую оптимизацию.

Введение. Одним из наиболее естественных прочностных критериев рационального проектирования армированных тонкостенных конструкций является условие равнонапряжённости силовых элементов — волокон (проволок) — вдоль их траекторий, так как при этом несущая способность арматуры используется наиболее полно. Известным недостатком волокнистых композитов является их ослабленное сопротивление усилиям, вызывающим взаимный сдвиг волокон, поэтому ещё одним важным критерием рационального проектирования композитных конструкций является условие армирования их по направлениям главных напряжений. Структуры армирования, удовлетворяющие обоим этим условиям, иногда называют оптимальными.

При длительной эксплуатации изделия в случае статического термосилового нагружения подавляющую часть времени металлокомпозитная конструкция работает в условиях установившейся ползучести [1], поэтому актуальной является проблема рационального и оптимального армирования тонкостенных конструкций при установившейся ползучести всех фаз композиции.

Настоящее исследование посвящено изучению вопроса равнонапряжённого армирования пластин по направлениям главных напряжений и скоростей деформаций при установившейся ползучести.

Исходные уравнения и соотношения. Рассмотрим металлокомпозитную пластину, работающую в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния, армированную двумя семействами волокон (металлических проволок, возможно, изготовленных из разных материалов). Предполагается, что к рассматриваемому моменту времени деформации ползучести получили настолько значительное развитие, что по сравнению с ними можно пренебречь начальными упругими и пластическими деформациями [1]. Тогда задача равнонапряжённого армирования такой конструкции по направлениям главных напряжений и скоростей деформаций в условиях установившейся ползучести описывается следующими уравнениями и соотношениями (используется теория течения [1] и модель армированного слоя из [2]):

уравнениями равновесия [1]

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{2i,2} = -X_i \equiv -X_i^0(x_1, x_2) \rho_0 \left(1 - \sum_k \omega_k \right) - \sum_k X_i^{(k)}(x_1, x_2) \rho_k \omega_k, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

кинематическими соотношениями [1]

$$\xi_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2, \quad i, j = 1, 2; \quad (2)$$

определяющими уравнениями [2]

$$\sigma_{ij} = a\sigma_{ij}^0 + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki} l_{kj}, \quad i, j = 1, 2; \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ii}^0 &= 2g_0(H)(2\xi_{ii} + \xi_{jj}), \quad \sigma_{ij}^0 = 2g_0(H)\xi_{ij} \quad (j = 3 - i, i = 1, 2), \\ H &= 2\sqrt{\xi_{11}^2 + \xi_{11}\xi_{22} + \xi_{22}^2 + \xi_{12}^2}, \\ \sigma_k &= g_k(\xi_k)\xi_k, \quad \xi_k = \xi_{11}l_{k1}^2 + \xi_{22}l_{k2}^2 + 2\xi_{12}l_{k1}l_{k2}, \\ l_{k1} &= \cos\psi_k, \quad l_{k2} = \sin\psi_k \quad (k = 1, 2), \quad 0 \leq a = \text{const} \leq 1;\end{aligned}\tag{4}$$

условиями равнонапряжённого армирования по направлениям главных скоростей деформаций ползучести

$$\sigma_k = \text{const}, \quad k = 1, 2;\tag{5}$$

$$(\xi_{22} - \xi_{11})\sin 2\psi + 2\xi_{12}\cos 2\psi = 0, \quad \psi_1 = \psi, \quad \psi_2 = \psi + \frac{\pi}{2};\tag{6}$$

условием совместности скоростей деформаций ползучести

$$\xi_{11,22} + \xi_{22,11} - 2\xi_{12,12} = 0,\tag{7}$$

где X_i , v_i — компоненты векторов приведённых массовых нагрузок и скорости движения точек пластины по направлениям x_i ($i = 1, 2$) прямоугольной декартовой системы координат; ρ_0 , ρ_k — объёмные плотности материалов связующего и арматуры k -го семейства; X_i^0 , $X_i^{(k)}$ — компоненты удельных массовых нагрузок, действующих на связующее и арматуру k -го семейства; σ_{ij} , σ_{ij}^0 , ξ_{ij} — компоненты тензоров осреднённых напряжений, напряжений в связующем и скоростей деформаций ползучести соответственно; σ_k , ξ_k — напряжение и скорость деформации ползучести в k -м семействе арматуры, связанные коэффициентом пропорциональности $g_k(\xi_k)$ (зависимость $g_k \sim \xi_k$ известна); $g_0(H)$ — заданная функция, являющаяся коэффициентом пропорциональности между интенсивностью касательных напряжений T и интенсивностью скоростей деформаций H в связующем: $T = g_0(H)H$; a — интенсивность прослоек связующего; ω_k , ψ_k — интенсивность и угол (отсчитываемый от направления x_1) армирования волокнами k -го семейства, причём должны выполняться физические ограничения

$$0 \leq \omega_k \quad (k = 1, 2), \quad 0 \leq \sum_k \omega_k \leq \omega_*;\tag{8}$$

ω_* — предельно допустимая удельная суммарная плотность армирования (обычно на практике $\omega_* \approx 0,7$); суммирование производится по указанному индексу от 1 до 2; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной x_i .

Так как материал связующего предполагается изотропным, то из равенств (6) следует условие армирования по направлениям главных напряжений в связующем. Кроме того, в силу требования внедрения в конструкцию двух семейств волокон по взаимно ортогональным направлениям получаем локально ортотропный композитный материал пластины, для которого направления главных осреднённых напряжений и скоростей деформаций ползучести, определяемые равенствами (6), совпадают.

В случае степенного закона $\xi = B\sigma^m$, связывающего скорость деформации ξ и напряжение σ в материале каждой фазы композиции, имеем следующие зависимости [1]:

$$g_0(H) = \bar{B}_0 H^{\mu_0 - 1}, \quad g_k(\xi_k) = \bar{B}_k \xi_k^{\mu_k - 1}, \quad \bar{B}_0 = B_0^{-\mu_0}, \quad \bar{B}_k = B_k^{-\mu_k}, \quad \mu_0 = \frac{1}{m_0}, \quad \mu_k = \frac{1}{m_k}, \quad k = 1, 2,\tag{9}$$

где B_0 , m_0 , B_k , m_k — известные характеристики материалов связующего и арматуры k -го семейства, зависящие от температуры, которая предполагается однородной в пластине (в противном случае пришлось бы решать связанную задачу теплопроводности и рационального армирования с заранее неизвестными эффективными коэффициентами теплопроводности, что выходит за рамки настоящего исследования).

На контуре пластины Γ заданы статические граничные условия

$$\sigma_{1i}n_1 + \sigma_{2i}n_2 = p_i \quad (i = 1, 2), \quad n_1 = \cos\beta, \quad n_2 = \sin\beta,\tag{10}$$

где p_i — заданные компоненты контурной нагрузки; β — угол внешней нормали к контуру.

Система разрешающих уравнений и граничные условия. Из требования равнонапряжённости арматуры (5) с учётом (4) получаем

$$\begin{aligned}\xi_{11}\cos^2\psi_k + \xi_{22}\sin^2\psi_k + \xi_{12}\sin 2\psi_k &= \xi_k = \text{const}, \\ \xi_k &= f_k(\sigma_k) = \text{const}, \quad k = 1, 2,\end{aligned}\tag{11}$$

где ξ_k – известные константы; f_k – функции, обратные $g_k(\xi_k)\xi_k$ (в случае степенного закона определяющих уравнений для арматуры из (9) имеем $f_k(\sigma_k) = B_k\sigma_k^{m_k}$). Из условий рациональности (6), (11) следует

$$\xi_{ii} = \frac{1}{2} \left[\xi_1 + \xi_2 - (-1)^i (\xi_1 - \xi_2) \cos 2\psi \right], \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2} (\xi_1 - \xi_2) \sin 2\psi, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

После подстановки (12) в условие совместности (7) получим

$$\begin{aligned} (\xi_1 - \xi_2) \left[\frac{\partial^2 \cos 2\psi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \sin 2\psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \cos 2\psi}{\partial x_2^2} \right] = \\ = (\xi_1 - \xi_2) \left[\partial_s (\partial_n (\psi)) + \partial_n (\partial_s (\psi)) + (\partial_n (\psi))^2 - (\partial_s (\psi))^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где операторы дифференцирования по направлениям армирования имеют вид

$$\partial_s (\cdot) = (\cdot)_{,1} \cos \psi + (\cdot)_{,2} \sin \psi, \quad \partial_n (\cdot) = (\cdot)_{,2} \cos \psi - (\cdot)_{,1} \sin \psi. \quad (14)$$

Так как интенсивность скоростей деформаций сдвига H определяется вторым инвариантом тензора скоростей деформаций ползучести [1], то в рассматриваемом случае из (4) имеем

$$H = 2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2} = \text{const} > 0. \quad (15)$$

Из соотношений (4), (12) с учётом равенства (15) определим напряжения в связующем как функции от угла армирования:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^0(\psi) &= G_0 [3(\xi_1 + \xi_2) - (-1)^i (\xi_1 - \xi_2) \cos 2\psi], \\ \sigma_{ij}^0(\psi) &= G_0 (\xi_1 - \xi_2) \sin 2\psi \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2), \quad G_0 = g_0(H) = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим выражения (16) в (3) и учтём равенства (5), (6), тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= aG_0 [3(\xi_1 + \xi_2) - (-1)^i (\xi_1 - \xi_2) \cos 2\psi] + \sigma_1 \omega_1 l_{1i}^2 + \sigma_2 \omega_2 l_{1j}^2, \\ \sigma_{ij} &= aG_0 (\xi_1 - \xi_2) \sin 2\psi + 0,5(\sigma_1 \omega_1 - \sigma_2 \omega_2) \sin 2\psi, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (17)$$

После подстановки напряжений (17) в уравнения равновесия (1) будем иметь

$$\begin{aligned} aG_0 (\xi_1 - \xi_2) \left(\frac{\partial \cos 2\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \sin 2\psi}{\partial x_2} \right) + \sigma_1 \left\{ \cos \psi \partial_s (\omega_1) + \omega_1 \left[\cos \psi \partial_n (\psi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \psi \partial_s (\psi) \right] \right\} + \sigma_2 \left\{ -\sin \psi \partial_n (\omega_2) + \omega_2 \left[-\cos \psi \partial_n (\psi) + \sin \psi \partial_s (\psi) \right] \right\} = -X_1, \\ aG_0 (\xi_1 - \xi_2) \left(\frac{\partial \sin 2\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \cos 2\psi}{\partial x_2} \right) + \sigma_1 \left\{ \sin \psi \partial_s (\omega_1) + \omega_1 \left[\sin \psi \partial_n (\psi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \psi \partial_s (\psi) \right] \right\} + \sigma_2 \left\{ \cos \psi \partial_n (\omega_2) + \omega_2 \left[\sin \psi \partial_n (\psi) + \cos \psi \partial_s (\psi) \right] \right\} = -X_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (10) с учётом (17) следуют граничные условия в разрешающем виде:

$$\begin{aligned} aG_0 (\xi_1 - \xi_2) \cos (2\psi - \beta) + \sigma_1 \omega_1 \cos \psi \cos (\psi - \beta) + \\ + \sigma_2 \omega_2 \sin \psi \sin (\psi - \beta) = p_1 - 3aG_0 (\xi_1 + \xi_2) \cos \beta, \\ aG_0 (\xi_1 - \xi_2) \sin (2\psi - \beta) + \sigma_1 \omega_1 \sin \psi \sin (\psi + \beta) - \\ - \sigma_2 \omega_2 \cos \psi \sin (\psi - \beta) = p_2 - 3aG_0 (\xi_1 + \xi_2) \sin \beta, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, в случае $\xi_1 - \xi_2 \neq 0$ система трех квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных (13), (18) замкнута относительно трёх неизвестных параметров армирования ω_1, ω_2, ψ . Эта система имеет четвёртый порядок, и для её однозначного интегрирования в каждой точке контура Γ имеем два нелинейных граничных условия (19). Если граничная задача (13), (18), (19) решена, то из (2) с учётом (12) можно определить скорости смещений точек конструкции.

Характеристическое уравнение системы (13), (18) при $\xi_1 - \xi_2 \neq 0$ с учётом (14) имеет вид

$$(\alpha_1 \cos \psi + \alpha_2 \sin \psi)^2 (-\alpha_1 \sin \psi + \alpha_2 \cos \psi)^2 = 0, \quad (20)$$

где α_1, α_2 ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$) — параметры, задающие характеристическое направление. Равенство (20) указывает на то, что система разрешающих уравнений (13), (18) является квазилинейной системой гиперболического типа [3], имеющей две двукратные ортогональные характеристики, совпадающие с траекториями армирования.

Известно [3], что для гиперболических уравнений краевая задача может быть решена только при специально согласованных граничных условиях, поэтому граничная задача (13), (18), (19) может быть решена лишь при специально подобранных контурных p_1, p_2 и массовых X_1, X_2 нагрузках. Условия разрешимости этой граничной задачи требуют проведения дополнительного более тонкого математического исследования, что выходит за рамки настоящей работы.

Полуобратный метод решения задачи рационального армирования. Если рассматривается частный случай, когда главные скорости деформаций ползучести равны ($\xi_1 = \xi_2$), то уравнение совместности выполняется тождественно и система двух уравнений (18) недоопределена относительно неизвестных функций ω_1, ω_2, ψ . Этот случай является специфическим, так как любое направление равнонапряжённого армирования будет совпадать с направлением по главным скоростям деформаций и напряжений в связующем, но не обязательно будет совпадать с направлением главных осреднённых напряжений в композиции. При этом возможны два пути решения задачи рационального армирования.

Первый путь решения задачи при $\xi_1 = \xi_2$. Откажемся от выполнения требования армирования по направлениям главных осреднённых напряжений, но по-прежнему будем требовать выполнения условий равнонапряжённости арматуры по направлениям главных скоростей деформаций ползучести и напряжений в связующем, причём в общем случае $\psi_2 \neq \psi_1 \pm \frac{\pi}{2}$. Так как существует известное формальное сходство [1] между определяющими уравнениями установившейся ползучести (в рамках теории течения) и деформационной теории пластичности, то рассматриваемая задача становится изоморфной задаче о равнонапряжённом армировании однородно деформируемой пластины, материалы всех фаз композиции которой подчиняются деформационной теории. Последний случай детально исследован в [4], поэтому не будем останавливаться на этом вопросе более подробно, отметим лишь: при таком пути решения задачи равнонапряжённого армирования можно использовать волокна постоянного поперечного сечения, что удобно с точки зрения технологической реализации соответствующих рациональных проектов.

Второй путь решения задачи при $\xi_1 = \xi_2$. Будем дополнительно требовать, чтобы направления армирования совпадали с направлениями главных осреднённых напряжений ($\psi_2 = \psi_1 \pm \frac{\pi}{2}$). В этом случае можно использовать полуобратный метод решения задачи равнонапряжённого армирования.

Предположим, что из каких-то соображений известно статически допустимое поле осреднённых напряжений σ_{ij} , удовлетворяющее уравнениям равновесия (1) (массовые силы при этом не учитываются: $X_i = 0$) и статическим граничным условиям (10). Зная σ_{ij} ($i, j = 1, 2$), определим в каждой точке пластины угол ψ , задающий одно из направлений главных напряжений [5],

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})}, \quad \psi_1 = \psi, \quad \psi_2 = \psi + \frac{\pi}{2} \quad (21)$$

и сами значения главных осреднённых напряжений

$$\sigma_i^* = \frac{1}{2} \left[\sigma_{11} + \sigma_{22} - (-1)^i \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right], \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Пусть найденные главные напряжения в каждой точке пластины имеют один знак ($\operatorname{sign} \sigma_1^* = \operatorname{sign} \sigma_2^*$), нигде не равны нулю и не меняют знака при переходе от одной точки к другой. Тогда, записав определяющие уравнения (3), (17) в системе координат, связанной с направлениями главных осреднённых напряжений, получим

$$6a g_0 \left(2\sqrt{3} |\xi_1| \right) \xi_1 + \sigma_i \omega_i(x_1, x_2) = \sigma_i^*(x_1, x_2), \quad \operatorname{sign} \sigma_i = \operatorname{sign} \xi_1 = \operatorname{sign} \sigma_i^*, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

где учтено, что, согласно (4), $H = 2\sqrt{3} |\xi_1| = \operatorname{const} > 0$. Так как σ_i, ξ_1 — заданные величины, то из (23) определяем интенсивности армирования:

$$\omega_i(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma_i} \left[\sigma_i^*(x_1, x_2) - 6ag_0(2\sqrt{3}|\xi_1|)\xi_1 \right], \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

В рассматриваемом случае можно использовать уточнённую модель армированного слоя [2], когда в (3), (23) $a = 1 - \omega_1 - \omega_2$. При этом из (23) получаем систему следующих линейных алгебраических уравнений:

$$\left[\sigma_i - 6g_0(2\sqrt{3}|\xi_1|)\xi_1 \right] \omega_i - 6g_0(2\sqrt{3}|\xi_1|)\xi_1 \omega_j = \sigma_i^* - 6g_0(2\sqrt{3}|\xi_1|)\xi_1, \quad j = 3 - i, i = 1, 2. \quad (25)$$

Если детерминант системы (25) отличен от нуля, то из неё однозначно определяются плотности армирования ω_1, ω_2 .

Значение скорости деформаций ползучести ξ_1 в (24), (25) (а, значит, и напряжений в арматуре $\sigma_k = g_k(\xi_1)\xi_1$, $k = 1, 2$) должно быть выбрано таким образом, чтобы всюду в пластине выполнялись физические ограничения (8). В случае использования уравнений (24) первым неравенствам (8) можно удовлетворить, если определить

$$\sigma_{\min} = \min_{i=1,2} \min_{(x_1, x_2)} |\sigma_i^*(x_1, x_2)|, \quad \xi_{\min} = f_0\left(\frac{\sigma_{\min}}{6a}\right),$$

где f_0 — функция, обратная $g_0(2\sqrt{3}\xi)\xi = f_0^{-1}$, а затем задать $|\xi_1| \leq \xi_{\min}$.

В качестве допустимых полей осреднённых напряжений можно использовать напряжения, возникающие в однородных изотропных и ортотропных упругих пластинах той же геометрии при тех же типах нагружения, что и в рассматриваемой задаче рационального проектирования. Методы определения таких полей напряжений достаточно хорошо разработаны [6, 7 и др.].

Если использовать решение для изотропной пластины, то поле напряжений σ_{ij} определяется однозначно при заданном нагружении (в силу теоремы Леви—Мичелла). Если же используются решения для ортотропной пластины, то поле осреднённых напряжений σ_{ij} будет зависеть от степени анизотропии и ориентации осей ортотропии в плоскости (x_1, x_2) . Следовательно, в последнем случае полем допустимых напряжений можно управлять, варьируя параметры анизотропии вспомогательного материала. Разным полям осреднённых напряжений σ_{ij} будут соответствовать разные структуры равнонапряжённого армирования (разные ω_1, ω_2, ψ), что вытекает из соотношений (21)–(25). Кроме того, дополнительно управлять интенсивностями армирования ω_1, ω_2 можно за счёт выбора значения модуля скорости деформаций ползучести $|\xi_1|$ в (24), (25) (углы армирования ψ при этом не изменяются).

Таким образом, полуобратным методом можно получить совокупность решений задачи равнонапряжённого армирования пластин по направлениям главных напряжений при фиксированном нагружении и геометрии конструкции.

На рис. 1 изображены траектории равнонапряжённого армирования по направлениям главных осреднённых напряжений для пластины с малым круговым отверстием. На контуре отверстия приложено нормальное напряжение $p_0 = \text{const}$, на «бесконечности» приложены напряжения $\sigma_{11}^\infty = \frac{3}{2}p_0$, $\sigma_{22}^\infty = p_0$, $\sigma_{12}^\infty = 0$. Для определения полуобратным методом рациональных траекторий армирования использовалось решение задачи Кирша [6] для изотропной пластины с учётом наложения на это решение однородного поля напряжений $\sigma_{11}^* = \sigma_{22}^* = p_0$, $\sigma_{12}^* = 0$. Из рис. 1 видно, что почти всюду в пластине армирование осуществляется по горизонтальным и вертикальным направлениям ($\psi_1 \approx 0$, $\psi_2 \approx \frac{\pi}{2}$) и лишь в окрестности отверстия наблюдается значительное искривление такой прямолинейной структуры армирования. (Отметим, что в случае $\sigma_{11}^\infty = p_0$, получаем строго ортогональное и прямолинейное армирование во всей пластине, причём угол армирования $\psi_1 = \text{const}$ ($\psi_2 = \psi_1 + \frac{\pi}{2}$) может быть произвольным; кроме того, в этом случае допускается и осесимметричное однородное армирование по радиально-окружным направлениям).

Рис. 1. Структура равнонапряжённого армирования для неравномерно сжимаемой бесконечной пластины с круговым отверстием

Так как в процессе построения решения полуобратным методом не используется условие постоянства поперечных сечений арматуры, то непрерывные равнонапряженные волокна должны иметь по длине l_k переменные площади поперечных сечений $F_k(l_k)$. Для определения зависимостей $F_k(l_k)$ (что важно с точки зрения технологии изготовления арматуры для рационального проекта) поступим следующим образом [4]. Условно внедрим в пластину волокна постоянно-го поперечного сечения с площадями $F_k^0 = \text{const}$ по заданным траекториям с интенсивностями армирования $\bar{\omega}_k$, которые связаны с углами ψ_k равенствами [4]

$$(\bar{\omega}_k \cos \psi_k)_{,1} + (\bar{\omega}_k \sin \psi_k)_{,2} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (26)$$

Проинтегрировав эти уравнения при «начальных» условиях

$$\bar{\omega}_k(\Gamma_k) = \omega_k^0(\Gamma_k), \quad k = 1, 2, \quad (27)$$

получим значения функций $\bar{\omega}_k(x_1, x_2)$ во всей пластине. Здесь Γ_k — часть контура Γ , на которой волокна k -го семейства «входят» в пластину; ω_k^0 — контурные значения плотностей армирования, известные из формул (24), (25) при $(x_1, x_2) \in \Gamma_k$.

Относительное изменение площади поперечных сечений реальных равнонапряженных волокон будет определяться равенством [4]

$$\frac{F_k(l_k)}{F_k^0} = \frac{\omega_k(x_1, x_2)}{\bar{\omega}_k(x_1, x_2)}, \quad k = 1, 2, \quad (28)$$

где $x_i = x_i(l_k)$ ($i = 1, 2$) — координаты точек пластины вдоль выделенной траектории армирования k -го семейства с естественной координатой l_k ($k = 1, 2$) вдоль неё.

В [4] показано, что если на всей части контура $\omega_k^0(\Gamma_k) > 0$, то и во всей пластине $\bar{\omega}_k(x_1, x_2) > 0$ ($k = 1, 2$), следовательно, отношение в (28) будет определяться однозначно. (Решение «начальной» задачи (26), (27) при известных углах армирования ψ_k для каждого k по отдельности не вызывает затруднений [8], так как это задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка с характеристиками, совпадающими с траекториями армирования.)

Обсуждение результатов расчётов кольцевых пластин. В качестве следующего примера рассмотрим осесимметричную задачу о равнонапряженном армировании кольцевой пластины, ограниченной контурами радиусов r_0, r_1 ($0 < r_0 < r_1$). На пластину действуют только нормальные контурные напряжения одного знака p_{n0}, p_{n1} ($\text{sign } p_{n0} = \text{sign } p_{n1}$), массовые нагрузки отсутствуют. В этом случае направления главных напряжений совпадают с радиальным и окружным направлениями ($\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{2}$; здесь и далее углы армирования отсчитываются от направления полярного радиуса r). Единственное остающееся уравнение равновесия имеет вид [1]

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (29)$$

которому соответствуют граничные условия

$$\sigma_{rr}(r_0) = p_{n0}, \quad \sigma_{rr}(r_1) = p_{n1}. \quad (30)$$

Из уравнения (29) получаем

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \frac{d(r\sigma_{rr}(r))}{dr}. \quad (31)$$

Задав функцию $\sigma_{rr}(r)$, удовлетворяющую граничным условиям (30), из равенства (31) определим статически допустимое напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$. Выбор напряжения $\sigma_{rr}(r)$, кроме условий (30), ограничивается требованиями: $\text{sign } \sigma_{rr}(r) = \text{sign } p_{n0} = \text{sign } p_{n1}$ ($0 < r_0 < r_1$), а из (31) должно получаться $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$, удовлетворяющее равенству $\text{sign } \sigma_{\varphi\varphi}(r) = \text{sign } \sigma_{rr}(r)$.

Задавая разные функции $\sigma_{rr}(r)$, удовлетворяющие этим условиям, получим совокупность различных проектов равнонапряженного армирования, определяемых равенствами (24), (25) при $\sigma_1^* = \sigma_{rr}, \sigma_2^* = \sigma_{\varphi\varphi}$. В частности, если рассматривать квадратичное распределение напряжения σ_{rr} , то из (30), (31) получим

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{r - r_0}{r_1 - r_0} p_{n1} - \frac{r - r_1}{r_1 - r_0} p_{n0} + b(r - r_0)(r - r_1), \quad \sigma_{\varphi\varphi}(r) = \frac{dr\sigma_{rr}}{dr}. \quad (32)$$

Варьируя в (32) параметр b , получим разные распределения напряжений $\sigma_{rr}(r; b)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(r; b)$ в пластине, а значит, и разные плотности армирования $\omega_k(r; b)$, $k = 1, 2$ (см. (24), (25)), что ещё раз подтверждает возможность управления проектами равнонапряжённого армирования.

В качестве конкретного примера рассмотрим кольцевую пластину с характеристиками: $r_0 = 0,2$ м, $r_1 = 0,5$ м, $a = 0,3$, $m_0 = 2,16$, $B_0 = 3,19 \cdot 10^{-8}$ (МПа) $^{-m_0} \cdot \text{ч}^{-1}$, $m_1 = m_2 = 6,24$, $B_1 = B_2 = 6,32 \times 10^{-21}$ (МПа) $^{-m_1} \cdot \text{ч}^{-1}$ (характеристики материалов композиции соответствуют медной пластине, армированной по радиально-окружным направлениям стальной проволокой [9]).

Относительное изменение площади поперечных сечений арматуры радиального семейства определяется по-прежнему равенствами (26)–(28), причём решение краевой задачи (26), (27) в осесимметричном случае имеет вид [4]

$$\bar{\omega}_1(r) = \frac{r_1 \omega_1^0}{r}, \quad r_0 \leq r \leq r_1. \quad (33)$$

(Для арматуры окружного семейства в осесимметричном случае условие постоянства поперечных сечений волокон всегда выполняется [4].)

На рис. 2 изображены зависимости $\omega_1(r)$, $\omega_2(r)$, рассчитанные по формулам (24), (32) при разных значениях контурных нагрузок p_{n0} , p_{n1} и параметра b . Кривые 1, 1', 1'', 3 характеризуют функцию $\omega_1(r)$, а линии 2, 2', 2'', 4 – функцию $\omega_2(r)$. Кривые 1, 1', 1'' и 2, 2', 2'' определены при $p_{n0} = 30$ МПа, $p_{n1} = 80$ МПа (напряжения в арматуре обоих семейств при этом $\sigma_k = 362,25$ МПа), а 3, 4 – при $p_{n0} = 30$ МПа, $p_{n1} = 20$ МПа (напряжения в арматуре: $\sigma_k = 169,31$ МПа, $k = 1, 2$). Прямые линии 1–4 соответствуют линейному распределению напряжений ($b = 0$ в (32)), параболы 1', 2' – случаю $b = 400$ МПа/м², а 1'', 2'' – значению $b = -400$ МПа/м².

Сравнение кривых 1, 1', 1'' и 2, 2', 2'' позволяет проследить за изменением структуры армирования при варьировании статически допустимых полей напряжений (32) (варьировании параметра b). Кривые 2, 2', 2'' показывают, что при варьировании статически допустимых полей напряжений структуры армирования могут значительно изменяться, поэтому на множестве решений задачи равнонапряжённого армирования целесообразно осуществлять целевую оптимизацию. Так, если целевой функцией является минимум расхода арматуры

$$\Omega = \sum_{k=1}^2 \int_{r_0}^{r_1} \omega_k(r) r dr,$$

то из трёх рассмотренных случаев $b = -400, 0, 400$ МПа/м² ($p_{n0} = 30$ МПа, $p_{n1} = 80$ МПа) наилучшим будет проект при значении $b = -400$ МПа/м², что наглядно следует из сравнения кривых 1'' и 2'' с линиями 1, 1' и 2, 2' соответственно.

На рис. 3 изображены зависимости $f(r) = \frac{F_1(r)}{F_1^0}$ для рассматриваемой пластины, рассчитанные по формулам (28), (33). Линии 1, 1', 1'' на этом рисунке определены при тех же входных

Рис. 2. Зависимости плотностей армирования от полярного радиуса для кольцевой пластины с радиально-окружной структурой равнонапряжённого армирования

Рис. 3. Зависимости относительного изменения площадей поперечных сечений волокон от полярного радиуса для кольцевых пластин

данных, что и соответствующие кривые на рис. 2. Линия 2 на рис. 3 рассчитана при $b=0$, $p_{n0}=30$ МПа, $p_{n1}=20$ МПа, т. е. соответствует прямой 3 на рис. 2. Сопоставление кривых 1, 1', 1'' позволяет проследить за изменением площади поперечных сечений арматуры радиального семейства в зависимости от параметра b (от изменения статически допустимых полей осреднённых напряжений (32)). Видно, что линия 1'' незначительно отличается от прямой, поэтому при $b=-400$ МПа/м² зависимость $f(r)$ приближённо можно считать линейной.

Используя кинематические соотношения в полярной системе координат [1]

$$\xi_{rr}(r) = \frac{dv_r(r)}{dr}, \quad \xi_{\varphi\varphi}(r) = \frac{v_r(r)}{r}, \quad 2\xi_{r\varphi}(r) = \frac{dv_\varphi(r)}{dr} - \frac{v_\varphi(r)}{r}, \quad (34)$$

где v_r , v_φ — радиальная и окружная составляющие скорости перемещений точек пластины, с учётом условий равнонапряжённости $\xi_{\varphi\varphi} = \xi_2 = \text{const}$ и соотношений (9) получим радиальную скорость смещений точек внешнего контура рассматриваемой пластины в зависимости от напряжений в арматуре:

$$v_r(r_1) = r_1 \xi_{\varphi\varphi}(r_1) = r_1 \xi_2 = r_1 B_1 \sigma_1^{m_1} \quad (\sigma_2 = \sigma_1). \quad (35)$$

Рис. 4. Зависимости скоростей смещений точек внешнего контура кольцевых пластин от напряжений в арматуре

с одинаковой плотностью ($\omega_1(r) = \omega_2(r)$), получим ортогональную структуру армирования по логарифмическим спиральям, причём $\xi_{rr} = \xi_{\varphi\varphi} = 0$, $\xi_{r\varphi} \neq 0$, т. е. это будет и армирование по направлениям главных скоростей деформаций ползучести и напряжений в связующем.

Из условия равнонапряжённости арматуры в этом случае следует

$$\xi_{r\varphi} = \xi_1 = B_1 \sigma_1^{m_1} = \text{const}, \quad \xi_2 = -\xi_1, \quad (36)$$

а из третьего определяющего уравнения (3) с учетом (4), (36) имеем

$$2ag_0(2|\xi_1|)\xi_1 + \sigma_1\omega_1(r) = \frac{r_1^2 p_{r1}}{r^2}, \quad (37)$$

откуда

$$\omega_1(r) = \frac{1}{\sigma_1} \left(\frac{r_1^2 p_{r1}}{r^2} - 2ag_0(2|\xi_1|)\xi_1 \right), \quad a = \text{const}. \quad (38)$$

Если использовать уточнённую модель армированного слоя ($a = 1 - 2\omega_1$), то из (37) вместо (38) получим

$$\omega_1(r) = \frac{1}{\sigma_1 - 4g_0(2|\xi_1|)\xi_1} \left(\frac{r_1^2 p_{r1}}{r^2} - 2g_0(2|\xi_1|)\xi_1 \right), \quad a = 1 - 2\omega_1. \quad (39)$$

Из равенств (36)–(39) следует, что плотность равнонапряжённого армирования ω_1 параметрически зависит от уровня напряжений в волокнах ($\sigma_1 = \text{const}$). Варьируя σ_1 , можно получить разные распределения интенсивностей армирования в конструкции, т. е. и в этом случае можно управлять рациональными структурами.

На рис. 5 изображены графики зависимостей $\omega_1(r)$ для скручиваемой кольцевой пластины прежних размеров r_0 , r_1 , при прежних материалах фаз композиции и значении $p_{\tau 1} = 10$ МПа. Кривые 1, 1', 1'', 1''' рассчитаны при $\sigma_1 = 170$ МПа, а линии 2, 2', 2'' — при $\sigma_1 = 210$ МПа. Сплошные кривые 1, 2 определены по уточнённой модели армированного слоя с использованием равенства (39), а остальные (пунктирные) линии — по упрощённой модели (равенство (38)) при разных значениях величин a : кривые 1', 2' — при $a = 1$; линии 1'', 2'' — при $a = 0,3$; кривая 1''' — при $a = 0$ (нитяная модель).

Сравнение решений по приближенной модели с решениями по уточнённой модели показывает: из всех рассмотренных значений $a = \text{const}$ с уточнённой моделью лучше всего согласуется расчёт по формуле (38) при $a = 1$ (ср. кривые 1, 1' и 2, 2'). (Аналогичный результат получается и при исследовании предыдущего случая радиально-окружного армирования кольцевой пластины, нагруженной только радиальными концентрическими напряжениями.) Следовательно, в соотношениях (3) для упрощения расчётов можно рекомендовать значение $a = 1$.

На рис. 3 кривые 3, 3', 3'' и 4, 4' характеризуют зависимости $f(r) = F_1(r) / F_1^0$ для скручиваемой пластины, рассчитанные по формулам (28), (33), где следует заменить r_1 на r_0 . (Равенство (33) остаётся справедливым и при армировании по логарифмическим спиральям [4].) Линии 3, 3', 3'' определены при тех же входных данных, что и кривые 1, 1', 1''' на рис. 5 соответственно, а линии 4, 4' на рис. 3 вычислены при тех же входных данных, что и кривые 2, 2'' на рис. 5. Кривые 3, 3', 3'' и 4, 4' на рис. 3 указывают на то, что площади поперечных сечений равнонапряжённой арматуры в скручиваемой пластине изменяются существенно.

Сравнение кривых 1 и 1''' на рис. 5 при значениях $\omega_1 = 0,25 \div 0,35$ показывает, что они отличаются незначительно. Следовательно, в случае высокого удельного наполнения пластины арматурой ($\omega_1 + \omega_2 = 0,5 \div 0,7$), чего, как правило, стремятся добиться на практике, для некоторых композиций можно вообще пренебречь работой связующего (положить в (3) $a = 0$) при решении задач равнонапряжённого армирования металлокомпозитных тонкостенных конструкций в условиях установившейся ползучести, т. е. расчёт можно проводить по нитяной модели. Этот факт объясняется малым отношением величин $\frac{B_1}{B_0} \approx 2 \cdot 10^{-13}$, которое в случае высоко удельного наполнения композиции арматурой приводит к малому вкладу связующего в работу всего композита в целом.

Следовательно, армированные металлокомпозитные пластины в условиях установившейся ползучести при определённых типах композиций можно рассматривать как волокниты, пренебрегая работой связующего, поэтому для получения равнонапряжённых структур армирования таких конструкций можно использовать хорошо разработанную Г. И. Брызгалиным теорию согласованных А-проектов [10], частным случаем которых является армирование по направлениям главных напряжений. Однако подчеркнём, что если в условиях установившейся ползучести определённую металлокомпозицию и можно рассчитывать по нитяной модели, то при расчёте начального упругого или упругопластического деформирования конструкции из такой композиции нитяная модель уже не пригодна, так как в этом случае «жёсткое» связующее вносит существенный вклад в работу композиции в целом [4].

Используя соотношения (34), (36), определим окружную составляющую скорости перемещений точек пластины v_φ , предполагая, что внутренний контур неподвижен ($v_\varphi(r_0) = 0$), тогда

$$v_\varphi(r_1) = \left(2r_1 \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) \right) B_1 \sigma_1^{m_1}. \quad (40)$$

На рис. 4 кривая 2 характеризует зависимость $v_\varphi(r_1) \sim \sigma_1$, определяемую равенством (40), при заданных выше входных данных задачи о скручивании пластины. Кривые 1 и 2 на этом рисунке подобны, что следует из сравнения формул (35) и (40). Эти линии показывают: с увеличением уровня напряжений в равнонапряжённой арматуре металлокомпозитных пластин,

Рис. 5. Зависимости плотностей армирования от полярного радиуса для скручиваемой кольцевой пластины со спиральной структурой равнонапряжённого армирования

работающих в условиях установившейся ползучести, резко возрастает скорость ползучести точек конструкции при $|\sigma_k| > 250$ МПа ($k = 1, 2$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-08-00152-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Качанов, Л. М. Теория ползучести [Текст] / Л. М. Качанов. — М.: Физматгиз, 1960. — 456 с.
2. Немировский, Ю. В. Ползучесть однородных и композитных оболочек [Текст] / Ю. В. Немировский // Актуальные проблемы механики оболочек: Тр. междунар. конф., посвящённой 100-летию проф. Х. М. Муштари, 90-летию проф. К. З. Галимова и 80-летию проф. М. С. Корнишина. Казань 26–30 июня 2000 г. — Казань: Новое знание, 2000. — С. 42–49.
3. Рождественский, Б. Л. Системы квазилинейных уравнений [Текст] / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — М.: Наука, 1969. — 592 с.
4. Немировский, Ю. В. Рациональное проектирование армированных конструкций [Текст] / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 2002. — 488 с.
5. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н. Н. Малинин. — М.: Машиностроение, 1968. — 400 с.
6. Демидов, С. П. Теория упругости [Текст] / С. П. Демидов. — М.: Высш. шк., 1979. — 432 с.
7. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С. Г. Лехницкий; 2-е изд. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
8. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка [Текст] / Э. Камке. — М.: Наука, 1966. — 260 с.
9. Писаренко, Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести [Текст] : Справ. пособие. / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. — Киев: Наук. думка, 1981. — 496 с.
10. Брызгалин, Г. И. Проектирование деталей из композитных материалов волокнистой структуры [Текст] / Г. И. Брызгалин. — М.: Машиностроение, 1982. — 84 с.

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христановича
СО РАН, г. Новосибирск

Поступила 18.07.2007