Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Степанова, М. Е. Федина, Анализ собственных значений в задаче о трещине поперечного сдвига в материале со степенным определяющим законом, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 60–68

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:24:50

УДК 539.376

Л. В. Степанова, М. Е. Федина

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ТРЕЩИНЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА В МАТЕРИАЛЕ СО СТЕПЕННЫМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ ЗАКОНОМ

Исследована нелинейная задача на собственные значения, следующая из проблемы определения напряжённо-деформированного состояния вблизи вершины трещины поперечного сдвига в материале со степенной зависимостью между деформациями и напряжениями. Для нахождения собственных значений используется метод возмущений, основанный на разложении собственного значения, соответствующей собственной функции и показателя нелинейности материала в ряд по степеням малого параметра, представляющего собой разность между собственными значениями, отвечающими линейной и нелинейной задачам. Дано сравнение полученных собственных значений с точным численным решением рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения.

Введение. Предметом настоящего исследования является определение всего спектра собственных чисел нелинейной задачи на собственные значения, возникающей в результате применения метода разложения по собственным функциям компонент тензора напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями.

Анализ напряжённо-деформированного состояния вблизи кончика трещины является одной из основных проблем современной механики трещин. Особый интерес вызывало и вызывает исследование полей напряжений и деформаций у вершины трещины в материалах с нелинейными определяющими уравнениями. Наибольшее распространение получил степенной закон связи между напряжениями и деформациями (или напряжениями и скоростями деформаций, если речь идёт о степенном законе Хортона теории установившейся ползучести).

Следует отметить, что определение напряжённо-деформированного состояния в материале со степенным законом является предметом многочисленных исследований, начиная с классических работ Дж. Хатчинсона, Дж. Райса и Дж. Розенгрена [1, 2], в которых установлена асимптотика напряжений вблизи устья трещины и показано, что компоненты тензора напряжений определяются в соответствии с равенством

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{J}{B I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (1)$$

где J — инвариантный интеграл механики разрушения; r, θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины; B, n — материальные константы степенного закона упрочнения; $I_n = I_n(n)$ — безразмерный J -интеграл, $\tilde{\sigma}_{ij}$ — универсальное угловое распределение напряжений, определяемое из решения краевой задачи.

Следует отметить, что в течении многих лет построение высших приближений в задаче Хатчинсона—Райса—Розенгрена являлось предметом многочисленных исследований [3–5]. В [3] получено аналитическое решение задачи о трещине антиплоского сдвига в упрочняющемся по степенному закону пластическом материале. С помощью трансформации годографа и асимптотического анализа найдены разложения компонент тензора напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины. Метод годографа даёт возможность аналитического определения степеней асимптотических разложений напряжений и деформаций и их угловых коэффициентов. В [4] разработан алгоритм и вычислительная программа для построения трёхчленного асимптотического разложения компонент тензора напряжений и вектора перемещений у вершины трещины нормального отрыва. В [5] авторы, фокусируя своё внимание на исследование трещин в условиях ползучести со степенным законом теории установившейся ползучести, отмечают необходимость определения высших членов в асимптотических разложениях напряжений и скоростей деформаций ползучести. Во всех упомянутых работах главный член асимптотических разложений напряжений — решение Хатчинсона—Райса—Розенгрена (1).

В настоящее время сложилось понимание о необходимости определения всего спектра собственных значений в задаче Хатчинсона—Райса—Розенгрена. Так, например, в [6] отмечается, что в большинстве работ пренебрегают слагаемыми более высоких порядков вида $r^{\frac{3}{2}}, r, r^{\frac{1}{2}}, r^{-\frac{3}{2}}, r^{-\frac{5}{2}}, \dots$ в полном решении Уильямса [7, 8] при исследовании упругопластических задач. Если существует область пластического течения, охватывающая вершину трещины, то

полное решение вне области пластического течения должно содержать слагаемые более высоких порядков. В [6] обсуждается справедливость ряда традиционных гипотез, принимаемых при изучении задач о трещинах в упругопластических материалах, а именно, предположение о маломасштабном пластическом течении. Авторы данной работы приходят к заключению, что в полном решении в упругой области слагаемые более высоких порядков малости $r^{-\frac{3}{2}}$ должны учитываться в решении задачи и ими нельзя пренебрегать.

Дискуссия, развёрнутая в [6], ведёт к следующим вопросам общего характера:

- 1) сколько сингулярных слагаемых для выбранного неупругого материала может математически существовать вблизи вершины трещины и как они могут быть определены?
- 2) при каких условиях то или иное слагаемое в асимптотическом разложении можно трактовать как физически обоснованное и играющее доминирующую роль?

А именно, если классическое решение Хатчинсона—Райса—Розенгрена (1) с теоретически известным собственным значением $s = -\frac{1}{n+1}$ не является доминирующим слагаемым в окрестности вершины трещины, то как можно найти общую функциональную зависимость $s = s(n)$?

В [9] численно определены собственные значения для нелинейной задачи на собственные значения, следующей из задачи определения напряжённо-деформированного состояния у неподвижной трещины нормального отрыва в условиях плоского напряжённого состояния. Решение было получено методом Рунге—Кутты в сочетании с методом пристрелки. Однако в рассматриваемом случае (для задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига) метод пристрелки становится многопараметрическим и результаты требуют дополнительного обоснования.

Попытка определения функциональной зависимости $s = s(n, s_0)$, где $s_0 = s|_{n=1}$ — собственное число, отвечающее линейной задаче ($n = 1$), была предпринята в [10], где на основании формулы Нейбера [11] предлагается следующая приближенная оценка для собственного значения s :

$$s|_n \approx \frac{2}{n+1} (s|_{n=1} - 2) + 2. \quad (2)$$

Здесь s — собственное значение в разложении по собственным функциям функции напряжений Эри $F(r, \theta) = r^s f(\theta)$. Приближённая формула (2) построена таким образом, чтобы при $s|_{n=1} = \frac{1}{2}$, что соответствует задаче о трещине в линейном упругом материале, получить решение Хатчинсона—Райса—Розенгрена (1), а при $n \rightarrow \infty$, что соответствует идеальнопластическому материалу, было справедливо равенство $s|_n = 2$, показывающее отсутствие особенности поля напряжений. Однако зависимость (2), построенная специальным образом для получения решения Хатчинсона—Райса—Розенгрена (1), не годится для $s|_{n=1} \neq \frac{1}{2}$ и следует прибегнуть к более точным методам определения собственных значений.

Для определения всего спектра собственных значений можно воспользоваться методом возмущений, развитым в асимптотической теории. Впервые, по-видимому, данный подход в задачах механики разрушения был реализован в [12], где установлен весь спектр собственных значений задачи о трещине антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями и найдена аналитическая зависимость собственного числа от показателя нелинейности материала n и от собственного числа, соответствующего линейной задаче ($n = 1$).

Целью настоящей работы является анализ собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, которая получается при рассмотрении трещины поперечного сдвига в условиях плоского деформированного состояния, с помощью метода возмущений.

1. Постановка задачи. Рассматривается окрестность полубесконечной трещины поперечно-го сдвига в неограниченном теле (см. рисунок) в материале со степенными определяющими соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij}, \quad (3)$$

где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; B , n — константы материала, определяемые экспериментально; s_{ij} — девиатор тензора напряжений; $\sigma_e^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{3}{4} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 3\sigma_{r\theta}^2$ — квадрат интенсивности напряжений.

Уравнения равновесия рассматриваемой задачи в полярной системе координат r, θ с полюсом в вершине трещины (см. рисунок) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \quad (4)$$

Условие совместности деформаций представляется в форме

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \quad (5)$$

В предположении реализации плоского деформированного состояния определяющие соотношения (3) имеют форму

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= -\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{3}{4} B \sigma_e^{n-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} \sigma_{r\theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия — условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0 \quad (7)$$

— замыкают постановку задачи.

В полярных координатах компоненты тензора напряжений выражаются через функцию напряжений Эри $F(r, \theta)$ согласно формулам

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta F - \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right). \quad (8)$$

Степенной характер определяющих уравнений (6) позволяет представить функцию напряжений Эри $F(r, \theta)$ в виде произведения

$$F(r, \theta) = r^{\lambda+1} f(\theta). \quad (9)$$

Тогда компоненты тензора напряжений определяются согласно формулам

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = r^{\lambda-1} [(\lambda+1)f(\theta) + f''(\theta)], \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = r^{\lambda-1} \lambda(\lambda+1)f(\theta), \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = -r^{\lambda-1} \lambda f'(\theta), \quad (10)$$

и условие совместности деформаций (5) приводит к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению четвёртого порядка относительно функции $f(\theta)$:

$$\begin{aligned} f_e^2 f^{IV} \{ (n-1) [(1-\lambda^2)f + f'']^2 + f_e^2 \} + (n-1)(n-3) \times \{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \}^2 \times \\ \times [(1-\lambda^2)f + f''] + (n-1)f_e^2 \{ [(1-\lambda^2)f' + f''']^2 + [(1-\lambda^2)f + f''] (1-\lambda^2)f'' + \\ + 4\lambda^2 (f''^2 + f' f''') \} [(1-\lambda^2)f + f''] + 2(n-1)f_e^2 \times \{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \} [(1-\lambda^2)f' + f'''] + \\ + C_1(n-1)f_e^2 \{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \} f' + \\ + C_1 f_e^4 f'' - C_2 f_e^4 [(1-\lambda^2)f + f''] + f_e^4 (1-\lambda^2)f'' = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь для краткости приняты следующие обозначения:

$$f_e^2 = [(1-\lambda^2)f + f'']^2 + 4\lambda^2 f'^2, \quad C_1 = 4\lambda[(\lambda-1)n+1], \quad C_2 = (\lambda-1)n[(\lambda-1)n+2]. \quad (12)$$

Решение уравнения (11) должно удовлетворять граничным условиям

$$f(\theta=0) = 0, \quad f''(\theta=0) = 0, \quad f(\theta=\pi) = 0, \quad f'(\theta=\pi) = 0, \quad (13)$$

следующим из условий симметрии задачи, формулируемым на линии продолжения трещины, и из условий отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины.

Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвёртого порядка (11) вместе с граничными условиями (13) представляет собой двухточечную краевую задачу, для решения

Геометрия окрестности вершины трещины и схематичное представление приложенной нагрузки

которой обычно обращаются к численным методам: семейству методов Рунге—Кутты и методу пристрелки, в рамках которых первоначально необходимо перейти к задаче Коши для уравнения (11) с условиями:

$$f(\theta=0)=0, f'(\theta=0)=A_1, f''(\theta=0)=0, f'''(\theta=0)=A_2. \quad (14)$$

В силу однородности дифференциального уравнения (11) можно положить одну из констант A_1 , A_2 равной единице, формулируя условие нормировки, например, $A_1=1$. Таким образом, определяя две неизвестные величины: начальное значение A_2 и константу λ , можно удовлетворить крайевым условиям на верхнем берегу трещины.

Следует отметить, что выражение (9) представляет собой разложение функции напряжений Эри по собственным функциям, а константу λ можно рассматривать как собственное значение нелинейной задачи на собственные значения для уравнения (11) с условиями

$$f(\theta=0)=0, f'(\theta=0)=1, f''(\theta=0)=0, f'''(\theta=0)=A_2. \quad (15)$$

Обычно данная задача исследуется численно методом Рунге—Кутты и методом пристрелки. Однако данный подход является многопараметрическим и полученные результаты требуют дополнительного обоснования [16]. С этой целью для определения всего спектра собственных значений задачи можно обратиться к методу возмущений, широко применяемому в асимптотической теории [13], но являющемуся пионерским в исследовании нелинейных задач на собственные значения, возникающих в механике разрушения.

2. Собственные значения. Аналитическое выражение для собственного значения λ как функции от собственного значения λ_0 , отвечающего линейной задаче ($n=1$), и показателя нелинейности материала n , может быть найдено с помощью метода возмущений. Суть предлагаемого подхода заключается в следующем представлении:

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \quad (16)$$

где λ_0 соответствует невозмущенной линейной задаче ($n=1$); ε — малый параметр, описывающий количественно отклонение собственного числа λ , отвечающего нелинейной задаче, от собственного числа λ_0 . Допущение о малости параметра ε основано на имеющейся аналитической формуле для собственного значения λ задачи Хатчинсона—Райса—Розенгрена [1, 2] и подтверждается полученным ниже решением. Таким образом, показатель нелинейности материала n и функция, описывающая угловые распределения компонент тензора напряжений $f(\theta)$, представляются в следующем виде:

$$n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots, \quad (17)$$

$$f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \dots, \quad (18)$$

где $f_0(\theta)$ — решение линейной задачи.

Оригинальная идея использования предлагаемой техники отыскания спектра собственных значений для данного класса задач механики разрушения принадлежит М. Анхеузеру и Д. Гроссу [12]. Однако формальный перенос идеологии, применённой в [12], основанной на исключении вековых слагаемых в асимптотическом разложении (18), не даёт возможности отыскания собственных значений, поскольку при построении асимптотического разложения (18) (при нахождении функции $f_j(\theta)$) на каждом j -ом шаге возникают вековые слагаемые двух типов, исключение которых приводит к двум уравнениям относительно одного неизвестного коэффициента асимптотического разложения (17) n_j . В настоящем исследовании используется подход [13], базирующийся на формулировке условия разрешимости краевой задачи для отыскания функции f_j . Данное условие разрешимости и является искомым условием для определения n_j .

Подстановка (16)–(18) в (11) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε , приводят к неоднородным обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: f_0^{IV} + 2(1 + \lambda_0^2) f_0'' + (1 - \lambda_0^2)^2 f_0 &= 0, \\ \varepsilon^1: f_1^{IV} + 2(1 + \lambda_0^2) f_1'' + (1 - \lambda_0^2)^2 f_1 &= -C_1^1 f_0'' - 2x_0 \lambda_0 - x_0 C_2^1 - \\ &- n_1 \frac{x_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) + 2h_0 (g_0 x_0' - x_0 h_0 + 2\lambda_0^2 g_0 f_0')}{g_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 : & g_0^2 \left[f_2^{IV} + 2(1 + \lambda_0^2) f_2'' + (1 - \lambda_0^2)^2 f_2 \right] + \\ & + g_0^2 \left[C_1^2 f_0'' - x_0(1 + C_2^2) + 2\lambda_0 C_2^1 f_0 \right] + 2g_0 g_1 \left[f_1^{IV} + 2(1 + \lambda_0^2) f_1'' + (1 - \lambda_0^2)^2 f_1 \right] + \\ & + n_1 \left[(2f_0'' x_0 + \omega_0)(x_1 - 2\lambda_0 f_0) g_0 + g_0 x_0 (f_1^{IV} x_0 + \omega_1) + \right. \\ & + g_1 x_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) + 4\lambda_0 (f_0 h_0^2 - f_0' g_0) - 2h_0 (h_0 x_1 - h_1 x_0) + \\ & + 4\lambda_0^2 (g_0 f_0' h_1 + g_0 f_1' h_0 + g_1 f_0' h_0) + 2(g_0 h_0 x_1' + g_0 h_1 x_0' + g_1 h_0 x_0') \left. \right] + \\ & + n_1^2 x_0 h_0^2 + n_2 \left[x_0 g_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) + 2h_0 (x_0 h_0 + x_0' g_0 + 2\lambda_0 g_0 f_0') \right] = 0, \\ \varepsilon^3 : & \dots, \end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_0 &= (1 - \lambda_0^2) f_0 + f_0'', \quad g_0 = x_0^2 + 4\lambda_0^2 (f_0')^2, \quad h_0 = x_0 x_0' + 4\lambda_0^2 f_0' f_0'', \\ \omega_0 &= (x_0')^2 + (1 - \lambda_0^2) x_0 f_0'' + 4\lambda_0^2 (f_0'')^2 + 4\lambda_0^2 f_0' f_0''', \\ x_1 &= (1 - \lambda_0^2) f_1 + f_1'', \quad g_1 = 2x_0 (x_1 - 2\lambda_0 f_0) + 8\lambda_0 f_0' (\lambda_0 f_1' + f_0'), \\ h_1 &= x_0 (x_1' - 2\lambda_0 f_0') + x_0' (x_1 - 2\lambda_0 f_0) + 4\lambda_0^2 f_0' f_1'' + 4f_0'' (\lambda_0^2 f_1' + 2\lambda_0 f_0'), \\ \omega_1 &= 2x_0' (x_1' - 2\lambda_0 f_0') + x_0 [(1 - \lambda_0^2) f_1'' - 2\lambda_0 f_0''] + 8\lambda_0 [(f_0'')^2 + f_0' f_0'''] + \\ & + 4\lambda_0^2 (2f_0'' f_1'' + f_0' f_1'' + f_1' f_0''') + (1 - \lambda_0^2) f_0'' (x_1 - 2\lambda_0 f_0), \\ C_1^1 &= 4\lambda_0 [2 + n_1 (\lambda_0 - 1)], \quad C_1^2 = 4[n_2 \lambda_0^2 - n_2 \lambda_0 - n_1 + 1], \\ C_2^1 &= 2\lambda_0 [1 + n_1 (\lambda_0 - 1)], \quad C_2^2 = 2\lambda_0 [n_2 (\lambda_0 - 1) + n_1] + [n_1 (\lambda_0 - 1) + 1]^2. \end{aligned}$$

Таким образом, получена совокупность краевых задач для неоднородных линейных дифференциальных уравнений:
для определения функции $f_0(\theta)$:

$$\begin{cases} f_0^{IV} + 2(1 + \lambda_0^2) f_0'' + (1 - \lambda_0^2)^2 f_0 = 0, \\ f_0(\theta = 0) = 0, \quad f_0''(\theta = 0) = 0, \quad f_0(\theta = \pi) = 0, \quad f_0'(\theta = \pi) = 0; \end{cases} \quad (19)$$

для определения функции $f_1(\theta)$:

$$\begin{cases} f_1^{IV} + 2(1 + \lambda_0^2) f_1'' + (1 - \lambda_0^2)^2 f_1 = -C_1^1 f_0'' - 2x_0 \lambda_0 - x_0 C_2^1 - \\ - n_1 \frac{x_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) + 2h_0 (g_0 x_0' - x_0 h_0 + 2\lambda_0^2 g_0 f_0')}{g_0}, \\ f_1(\theta = 0) = 0, \quad f_1''(\theta = 0) = 0, \quad f_1(\theta = \pi) = 0, \quad f_1'(\theta = \pi) = 0; \end{cases} \quad (20)$$

для определения функции $f_2(\theta)$:

$$\begin{cases} f_2^{IV} + 2(1 + \lambda_0^2) f_2'' + (1 - \lambda_0^2)^2 f_2 = -C_1^2 f_0'' - x_0(1 + C_2^2) + 2\lambda_0 C_2^1 f_0 - 2g_1/g_0 \left[f_1^{IV} + 2(1 + \lambda_0^2) f_1'' + (1 - \lambda_0^2)^2 f_1 \right] - \\ - n_1/g_0^2 \left[(2f_0'' x_0 + \omega_0)(x_1 - 2\lambda_0 f_0) g_0 + g_0 x_0 (f_1^{IV} x_0 + \omega_1) + g_1 x_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) + 4\lambda_0 (f_0 h_0^2 - f_0' g_0) - \right. \\ - 2h_0 (h_0 x_1 - h_1 x_0) + 4\lambda_0^2 (g_0 f_0' h_1 + g_0 f_1' h_0 + g_1 f_0' h_0) + 2(g_0 h_0 x_1' + g_0 h_1 x_0' + g_1 h_0 x_0') \left. \right] - \\ - n_1^2 x_0 h_0^2/g_0^2 - n_2/g_0^2 \left[x_0 g_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) + 2h_0 (x_0 h_0 + x_0' g_0 + 2\lambda_0 g_0 f_0') \right], \\ f_2(\theta = 0) = 0, \quad f_2''(\theta = 0) = 0, \quad f_2(\theta = \pi) = 0, \quad f_2'(\theta = \pi) = 0; \end{cases} \quad (21)$$

.....

Общее решение дифференциального уравнения краевой задачи (19) имеет следующий вид:

$$f_0(\theta) = B_1 \cos[(\lambda_0 - 1)\theta] + B_2 \sin[(\lambda_0 - 1)\theta] + B_3 \cos[(\lambda_0 + 1)\theta] + B_4 \sin[(\lambda_0 + 1)\theta], \quad (22)$$

где B_j — постоянные интегрирования.

Характеристическое уравнение для собственного значения λ_0 получается из граничных условий на берегах трещины:

$$\sin 2\pi \lambda_0 = 0, \quad (23)$$

где $\lambda_0 = \frac{m}{2}$, а m — целое число.

Учёт граничных условий позволяет получить соотношения между постоянными интегрирования B_j :

$$\begin{aligned} B_{3m} &= -\frac{m-2}{m+2} B_{1m}, & B_{4m} &= -B_{2m}, & m &= \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots; \\ B_{3m} &= -B_{1m}, & B_{4m} &= -\frac{m-2}{m+2} B_{2m}, & m &= 0, 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

В случае трещины поперечного сдвига необходимо учесть условие симметрии решения. Тогда соотношения между постоянными интегрирования B_j будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} B_{1m} &= B_{3m} = 0, & B_{2m} &= -B_{4m}, & m &= \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots; \\ B_{1m} &= B_{3m} = 0, & B_{4m} &= -\frac{m-2}{m+2} B_{2m}, & m &= 0, 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Решение краевой задачи (19) относительно функции $f_0(\theta)$ в случае нечетных m имеет форму

$$f_0(\theta) = B_2 \{ \sin[(\lambda_0 - 1)\theta] - \sin[(\lambda_0 + 1)\theta] \}. \quad (26)$$

Амплитуда решения B_2 находится из решения задачи в целом. Примем для определённости (на данном шаге), что $B_2 = 1$.

Краевая задача (20) — краевая задача для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения четвёртого порядка. Нетривиальное решение рассматриваемой краевой задачи будет существовать, если выполнено условие разрешимости [13, 14], для формулировки которого необходимо обратиться к сопряжённой краевой задаче. Условие разрешимости получается с помощью любого нетривиального решения однородной сопряжённой задачи.

3. Условие разрешимости. Условие разрешимости краевой задачи (20) имеет вид

$$\int_0^\pi u g_1 d\theta = 0, \quad (27)$$

где $u = f_0(\theta)$ — решение сопряжённой задачи, а g_1 — правая часть дифференциального уравнения в (20).

Условие (27) приводит к аналитическому выражению для коэффициента n_1 :

$$n_1 = -\frac{2}{\lambda_0 - 1}.$$

Тогда двучленное асимптотическое разложение показателя нелинейности материала имеет вид

$$n = 1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda_0 - 1} + O(\varepsilon^2).$$

Условие разрешимости краевой задачи (21) аналогичного (20) вида

$$\int_{-\pi}^\pi u g_2 d\theta = 0,$$

где g_2 — правая часть уравнения в (21), имеет существенно более громоздкий вид и найти аналитическое выражение для n_2 пока не представляется возможным.

Поскольку определение аналитической зависимости $n_2(\lambda_0)$ наталкивается на серьёзные математические трудности, было принято решение о численном нахождении коэффициента n_2

и следующих за ним коэффициентов асимптотического разложения показателя нелинейности материала (17).

С целью определения коэффициентов n_j была разработана процедура, сущность которой заключается в следующем. Для численного определения коэффициентов n_j на каждом j -том шаге исследуется система линейных дифференциальных уравнений относительно функций $f_0, f_1, \dots, f_j$. Правая часть неоднородного уравнения для функции f_j содержит пока неизвестный коэффициент n_j . Формулировка условия разрешимости и его выполнение приводит к условию на данный коэффициент n_j . После установления коэффициента n_j упомянутая система уравнений решается численно и далее процедура повторяется.

С помощью математического пакета символьных вычислений MapleTM V Release 3 удаётся численно найти значения n_2 для различных значений λ_0 . Кроме этого, для наиболее важного с практической точки зрения случая $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$, были найдены численные значения n_j для $j = 1, 2, \dots, 9$:

$$n_1 = -2/(\lambda_0 - 1), \quad n_2 = 244/81, \quad n_3 = 8,760889, \quad n_4 = 28,195258, \quad n_5 = 95,766688, \\ n_6 = 337,769021, \quad n_7 = 1227,030049, \quad n_8 = 4564,652725, \quad n_9 = 17305,512285.$$

Таблица 1

Сравнение собственных чисел, найденных с помощью десятичленного прямого разложения и точного численного решения

n	10-тичленное прямое разложение	точное численное решение	$\delta, \%$
2	-0,260086	-0,27798	6,43
3	-0,214229	-0,27033	20,75
4	-0,189656	-0,26567	28,61
5	-0,172783	-0,259298	33,36
6	-0,159887	-0,25373	36,98
7	-0,149423	-0,24934	40,07
8	-0,140603	-0,24593	42,82
9	-0,132969	-0,24324	45,33

С помощью найденных значений коэффициентов n_j удаётся определить прямое разложение материальной константы n :

$$n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \varepsilon^3 n_3 + \\ + \varepsilon^4 n_4 + \varepsilon^5 n_5 + \varepsilon^6 n_6 + \\ + \varepsilon^7 n_7 + \varepsilon^8 n_8 + \varepsilon^9 n_9 + O(\varepsilon^{10}),$$

что, в свою очередь, позволяет определить малый параметр ε и соответствующее собственное значение λ (см. табл. 1). В табл. 1 приняты следующие обозначения:

$\delta = \left| \frac{\lambda_{\text{dir}} - \lambda_{\text{num}}}{\lambda_{\text{num}}} \right| \times 100\%$ — относительная погрешность; λ_{dir} — собственные числа, найденные с помощью 10-ти членного прямого разложения; λ_{num} — собственные числа, соответствующие точному численному решению.

В качестве проверки были найдены численно коэффициенты n_j для известного случая $\lambda_0 = \frac{1}{2}$: $n_j = 2^j$. Значит $n_j = \frac{(-1)^j}{(\lambda_0 - 1)^{j+1}}$, следовательно $n = -\frac{\lambda}{\lambda - 1}$, и $\lambda = \frac{n}{n+1}$, что соответствует хорошо известному решению Хатчинсона—Райса—Розенгрена.

С целью уменьшения погрешности при определении собственного значения λ можно обратиться к аппроксимациям Паде.

4. Аппроксимации Паде. Аппроксимации Паде [15] являются эффективным методом построения и вычисления значений степенных рядов. Аппроксимация Паде представляет собой функцию в виде отношения двух полиномов, коэффициенты которых определяются коэффициентами разложения функции в ряд. Таким образом, если задано разложение функции $f(z)$ в степенной ряд

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \quad (28)$$

то можно оптимальным образом выбрать коэффициенты a_i, b_j и получить аппроксимацию Паде:

$$\frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M}.$$

Если задан степенной ряд

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i,$$

представляющий функцию $f(z)$, то аппроксимация Паде — это рациональная функция вида

$$\left[\frac{L}{M} \right] = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M},$$

разложение которой в ряд Тейлора (с центром в нуле) совпадает с разложением (28) до тех пор пока это возможно. Для определённости полагается, что $b_0 = 1$. Тогда в числителе содержится $L+1$ свободных параметров, в знаменателе — M и всего имеется $L+M+1$ свободных параметров. Это означает, что в общем случае коэффициенты тейлоровского разложения функции $\left[\frac{L}{M}\right]$ при степенях $1, z, z^2, \dots, z^{L+M+1}$ должны совпадать с соответствующими коэффициентами ряда (28), то есть должно выполняться соотношение

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M} + O(z^{L+M+1}). \quad (29)$$

Избавляясь в (29) от дроби и сравнивая коэффициенты при $z^{L+1}, z^{L+2}, \dots, z^{L+M}$, можно получить систему M линейных алгебраических уравнений с M неизвестными коэффициентами знаменателя. Таким образом, могут быть найдены b_i . Коэффициенты числителя $a_0, a_1, \dots, a_L$ находятся сравнением коэффициентов при $1, z, z^2, \dots, z^L$.

Уравнения для определения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_L$ и $b_1, b_2, \dots, b_M$ называются уравнениями Паде. В случае, когда система для определения коэффициентов знаменателя разрешима, можно определить коэффициенты числителя и знаменателя аппроксимации Паде $\left[\frac{L}{M}\right]$. Коэффициенты тейлоровского разложения этой функции при $1, z, z^2, \dots, z^{L+M}$ совпадают с соответствующими коэффициентами ряда (28).

5. Применение аппроксимаций Паде к исследуемой проблеме. В табл. 2 приведены значения собственного числа λ , полученные для разных типов аппроксимаций Паде, и сравнение их с точным численным решением.

Таблица 2

**Сравнение собственных чисел, найденных с помощью аппроксимаций Паде
разного порядка с точным численным решением**

n	$\left[\frac{1}{1}\right]$	$\delta, \%$	$\left[\frac{1}{2}\right]$	$\delta, \%$	$\left[\frac{2}{2}\right]$	$\delta, \%$	$\left[\frac{2}{3}\right]$	$\delta, \%$
2	-0,221649	20,26	-0,259700	6,57	-0,264941	4,68	-0,272423	1,99
3	-0,158227	41,46	-0,225222	16,68	-0,234870	13,11	-0,251328	7,02
4	-0,130136	51,01	-0,212468	20,02	-0,224269	15,58	-0,245171	7,71
5	-0,114285	55,92	-0,205880	20,60	-0,218912	15,57	-0,242315	6,54
6	-0,104105	58,96	-0,201865	20,44	-0,215687	14,99	-0,240676	5,14
7	-0,097014	61,09	-0,199164	20,12	-0,213536	14,36	-0,239615	3,90
8	-0,091792	62,67	-0,197224	19,80	-0,211998	13,79	-0,238873	2,86
9	-0,087786	63,90	-0,195762	19,51	-0,210846	13,31	-0,238324	2,02

n	$\left[\frac{3}{3}\right]$	$\delta, \%$	$\left[\frac{3}{4}\right]$	$\delta, \%$	$\left[\frac{4}{4}\right]$	$\delta, \%$	$\left[\frac{4}{5}\right]$	$\delta, \%$
2	-0,227407	1,40	-0,276297	0,60	-0,275944	0,73	-0,276136	0,66
3	-0,255308	5,55	-0,261334	3,32	-0,260307	3,70	-0,260882	3,49
4	-0,250202	5,82	-0,257840	2,94	-0,256537	3,40	-0,257272	3,16
5	-0,247897	4,39	-0,256349	1,13	-0,254910	1,69	-0,255725	1,37
6	-0,246594	2,81	-0,255528	0,70	-0,254010	0,11	-0,254871	0,45
7	-0,245758	1,43	-0,255009	2,27	-0,253440	1,64	-0,254331	2,00
8	-0,245176	0,30	-0,254653	3,54	-0,253047	2,89	-0,253960	3,26
9	-0,244748	0,62	-0,254392	4,58	-0,252759	3,91	-0,253688	4,29

6. Выводы. В настоящей работе выполнен анализ собственных чисел в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения полей напряжений и деформаций вблизи вершины трещины в материале со степенным законом упрочнения или со степенным законом Нортон теория установившейся ползучести (если под ε_{ij} понимать скорости деформаций ползучести).

Найдены собственные значения задачи для различных значений показателя нелинейности материала n (для $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$) с помощью метода возмущений.

Показано, что аппроксимация Паде позволяет определить собственные значения с относительной погрешностью, например для аппроксимации порядка $\left[\frac{4}{4}\right]$, от 0,73 % ($n = 2$) до 3,91 %

($n = 9$) (табл. 2). Относительная погрешность, полученная при сравнении точного численного решения и решения, найденного с помощью аппроксимации Паде, существенно ниже относительной погрешности, вычисленной для прямого разложения (см. табл. 1).

Следовательно, можно заключить, что описанная методика даёт эффективный способ отыскания собственных чисел рассматриваемой задачи на собственные значения. По крайней мере предлагаемый подход позволяет получить оценку в пределах указанной точности и впоследствии данная оценка может быть уточнена в ходе численного анализа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-08-01059-а) и гранта Президента РФ (МК – 6717.2006.1)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Hutchinson, J. W.* Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material [Text] / J. W. Hutchinson // J. Mech. Phys. Solids. — 1968. — Vol. 16. — P. 13–31.
2. *Rice, J. R.* Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material [Text] / J. R. Rice, G. F. Rosengren // J. Mech. Phys. Solids. — 1968. — Vol. 16. — P. 1–12.
3. *Yuan, F. G.* Analytical solutions of fully plastic crack-tip higher order fields under antiplane shear [Text] / F. G. Yuan, S. Yang // Int. J. of Fracture. — 1994. — Vol. 69. — P. 1–26.
4. *Nikishkov, G. P.* An algorithm and a computer program for the three-term asymptotic expansion of elastic-plastic crack tip stress and displacement fields [Text] / G. P. Nikishkov // Engineering Fracture Mech. — 1995. — Vol. 50, No. 1. — P. 65–83.
5. *Nguyen, B. N.* On higher-order crack-tip fields in creeping solids [Text] / B. N. Nguyen, P. R. Onck, E. Van Der Giessen // Trans. of the ASME. J. Appl. Mech. — 2000. Vol. 67, No. 2. — P. 372–382.
6. *Hui, C. Y.* Why K? High order singularities and small scale yielding [Text] / C. Y. Hui, A. Ruina // Int. J. of Fracture. — 1995. — Vol. 72. — P. 97–120.
7. *Williams, M. L.* On the stress distribution at the base of a stationary crack [Text] / M. L. Williams // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1957. — Vol. 24. — P. 109–114.
8. *Williams, M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension [Text] / M. L. Williams // J. of Appl. Mech. — 1952. — Vol. 19. — P. 526–528.
9. *Meng, L.* Eigenspectra and orders of singularity at a crack tip for a power-law creeping medium [Text] / L. Meng, S. B. Lee // Int. J. of Fracture. — 1998. — Vol. 92. — P. 55–70.
10. *Chen, D. H.* Plastic stress singularity near the tip of a V-notch [Text] / D. H. Chen, K. Ushijima // Int. J. of Fracture. — 2000. — Vol. 106. — P. 117–134.
11. *Neuber, H.* Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law [Text] / H. Neuber // J. of Appl. Mech. — 1961. — Vol. 28. — P. 544–550.
12. *Anheuser, M.* Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear [Text] / M. Anheuser, D. Gross // Arch. of Appl. Mech. — 1994. — Vol. 64. — P. 509–518.
13. *Найфе, А. Х.* Введение в методы возмущений [Текст] / А. Х. Найфе. — М.: Мир, 1984. — 535 с.
14. *Степанова, Л. В.* Математические методы механики разрушения [Текст] / Л. В. Степанова. — Самара: Сам. ун-т, 2006. — 232 с. — ISBN 5-86465-409-4.
15. *Бейкер, Дж.* Аппроксимации Паде [Текст] / Дж. Бейкер, П. Грейвс—Моррис. — М.: Мир, 1986. — 502 с.
16. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы [Текст] / Н. Н. Калиткин. — М.: Наука, 1978. — 512 с.