Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Попов, В. Н. Исуткина, Построение аналитического решения двумерной стохастической задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 90–94

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:30:22

УДК 539.376

Н. Н. Попов, В. Н. Исуткина

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

На основе метода малого параметра решена в первом приближении двумерная стохастическая нелинейная краевая задача ползучести толстостенной трубы под действием внутреннего давления. Задача рассматривается в полярных координатах для случая плоского деформированного состояния. Стохастичность введена в определяющие соотношения ползучести, взятые в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения, при помощи случайной однородной функции двух переменных. Проведён статистический анализ случайных полей напряжений и скоростей деформаций.

При решении стохастической нелинейной краевой задачи ползучести для толстостенной трубы под действием внутреннего давления в работах [1, 2] предполагалось, что случайные свойства материала изменяются только вдоль радиуса цилиндра. При этом допущении задача становится одномерной, решение которой на основе метода малого параметра можно получить с любой степенью точности.

В данной работе стохастические свойства материала трубы описываются случайной функцией двух аргументов радиуса r и угла φ . Компоненты тензора деформаций и напряжений также будут являться случайными функциями r и φ . Задача рассматривается в полярных координатах для случая плоского деформированного состояния.

Пусть компоненты тензора напряжений σ_r , σ_φ , $\sigma_{r\varphi}$ удовлетворяют уравнениям равновесия [3]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} = 0, \quad (1)$$

а компоненты тензора скоростей деформаций ε_r , ε_φ , $\varepsilon_{r\varphi}$ — условию совместности [3]

$$r \frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\varepsilon_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \varphi} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\varphi}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) замыкаются определяющими соотношениями, которые принимаются в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения (установившейся ползучести) в стохастической форме

$$\dot{\varepsilon}_\varphi = -\dot{\varepsilon}_r = \frac{c}{2} s^{n-1} (\sigma_\varphi - \sigma_r) (1 + \alpha U), \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi} = c s^{n-1} \sigma_{r\varphi} (1 + \alpha U). \quad (3)$$

Здесь $s^2 = \frac{3}{4} ((\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 4\sigma_{r\varphi}^2)$ — интенсивность напряжений; c и n — постоянные материала. С помощью случайной однородной функции $U(r, \varphi)$ описываются реологические свойства материала, а число α ($0 < \alpha < 1$) играет роль коэффициента вариации этих свойств. Математическое ожидание $\langle U \rangle$ и дисперсия $\langle U^2 \rangle$ имеют значения 0 и 1 соответственно. Обозначая через a и b соответственно внутренний и внешний радиусы цилиндра, граничные условия задачи примут вид

$$\sigma_r(a, \varphi) = -q, \quad \sigma_r(b, \varphi) = \sigma_{r\varphi}(a, \varphi) = \sigma_{r\varphi}(b, \varphi) = 0, \quad (4)$$

где q — внутреннее давление.

Соотношения (1)–(3) при граничных условиях (4) задают стохастическую краевую задачу ползучести, которую будем решать относительно компонент тензора напряжений. Поставленная задача является физически и статистически нелинейной, в связи с чем строится ее приближенное решение на основе метода линеаризации. Для статистической линеаризации задачи (1)–(3) производится разложение компонент тензора напряжений и деформаций по малому параметру α

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\circ + \alpha \sigma_{ij}^*, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^\circ, \quad \langle \sigma_{ij}^* \rangle = 0; \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^\circ + \alpha \varepsilon_{ij}^*, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^\circ, \quad \langle \varepsilon_{ij}^* \rangle = 0; \quad (6)$$

где $\sigma_{11} = \sigma_r$, $\sigma_{12} = \sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{22} = \sigma_\varphi$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_r$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{r\varphi}$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_\varphi$.

Нулевое приближение тензора напряжений задаёт известное детерминированное решение [4]:

$$\begin{aligned}\sigma_r^\circ &= A \left(b^{-\frac{2}{n}} - r^{-\frac{2}{n}} \right), \quad \sigma_{r\varphi}^\circ = 0, \\ \sigma_\varphi^\circ &= A \left(b^{-\frac{2}{n}} - \left(1 - \frac{2}{n} \right) r^{-\frac{2}{n}} \right), \quad A = \frac{q}{a^{-\frac{2}{n}} - b^{-\frac{2}{n}}}.\end{aligned}\quad (7)$$

С целью физической линеаризации соотношений (3) представим функцию s^{n-1} с помощью (5) в виде

$$s^{n-1} = (s_0^2 + s^*)^{\frac{n-1}{2}},$$

где

$$s_0^2 = \frac{3}{4} (\sigma_\varphi^\circ - \sigma_r^\circ)^2, \quad s_* = \frac{3}{2} \alpha (\sigma_\varphi^* - \sigma_r^*) (\sigma_\varphi^\circ - \sigma_r^\circ),$$

и разложим ее в ряд Тейлора с учётом только линейных членов:

$$s^{n-1} = s_0^{n-1} + \frac{n-1}{2} s_0^{n-3} s_*. \quad (8)$$

Флуктуации скоростей деформаций согласно (3), (5), (6), (8) будут иметь вид:

$$\dot{\varepsilon}_\varphi^* = -\dot{\varepsilon}_r^* = \frac{c}{2} s_0^{n-1} \left((\sigma_\varphi^\circ - \sigma_r^\circ) U + n (\sigma_\varphi^* - \sigma_r^*) \right), \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^* = c s_0^{n-1} \sigma_{r\varphi}^*. \quad (9)$$

При получении выражений (9) были отброшены все слагаемые, содержащие α^2 и более высокие степени α .

Если подставить соотношения (9) в уравнение совместности для флуктуаций скоростей деформаций (2), то можно получить следующее дифференциальное уравнение относительно флуктуаций напряжений:

$$\begin{aligned}r n l_0^2 \frac{\partial^2 l_*}{\partial r^2} - \frac{n}{r} l_0^2 \frac{\partial^2 l_*}{\partial \varphi^2} - 4 l_0^2 \frac{\partial^2 \sigma_{r\varphi}^*}{\partial r^2} + n l_0 \left(2r(n-1) \frac{\partial l_0}{\partial r} + 3 l_0 \right) \frac{\partial l_*}{\partial r} - 4 l_0 \left((n-1) \frac{\partial l_0}{\partial r} - \frac{l_0}{r} \right) \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^*}{\partial \varphi} + \\ + n(n-1) \left(r(n-2) \left(\frac{\partial l_0}{\partial r} \right)^2 + r l_0 \frac{\partial^2 l_0}{\partial r^2} + 3 l_0 \frac{\partial l_0}{\partial r} \right) l_* = \frac{l_0^3}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - l_0^3 r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \\ - l_0^2 \left(2r n \frac{\partial l_0}{\partial r} + 3 l_0 \right) \frac{\partial U}{\partial r} - n l_0 \left(r(n-1) \left(\frac{\partial l_0}{\partial r} \right)^2 + r l_0 \frac{\partial^2 l_0}{\partial r^2} + 3 l_0 \frac{\partial l_0}{\partial r} \right) U, \quad (10)\end{aligned}$$

где $l_0 = \sigma_\varphi^\circ - \sigma_r^\circ$, $l_* = \sigma_\varphi^* - \sigma_r^*$.

Подставляя в уравнение (10) детерминированное решение (7), после преобразований будем иметь

$$r^2 \frac{\partial^2 l_*}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 l_*}{\partial \varphi^2} - \frac{4r}{n} \frac{\partial^2 \sigma_{r\varphi}^*}{\partial r \partial \varphi} - \frac{(n-4)r}{n} \frac{\partial l_*}{\partial r} + \frac{4(n-2)}{n^2} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^*}{\partial \varphi} - \frac{4(n-1)}{n^2} l_* = \frac{2}{n^2} A r^{-\frac{2}{n}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r \frac{\partial U}{\partial r} \right). \quad (11)$$

Флуктуации напряжений удовлетворяют также уравнениям равновесия (1):

$$\frac{\partial \sigma_r^*}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^*}{\partial r} + \frac{\sigma_r^* - \sigma_\varphi^*}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}^*}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi^*}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}^*}{r} = 0, \quad (12)$$

Таким образом, статистически линейная задача представляет собой стохастическую систему из трёх линейных дифференциальных уравнений (11), (12) с частными производными относительно флуктуаций напряжений σ_{ij}^* с граничными условиями

$$\sigma_r^*(a, \varphi) = \sigma_r^*(b, \varphi) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}^*(a, \varphi) = \sigma_{r\varphi}^*(b, \varphi) = 0.$$

Если перейти к функции напряжения F по формулам

$$\sigma_r^* = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi^* = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi}^* = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi}, \quad (13)$$

то уравнения равновесия (12) будут выполняться тождественно, а уравнение (11) относительно функции напряжения F будет иметь вид

$$r^2 \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} - \frac{2(n-2)}{n} r \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} + \frac{(n-2)(3n-2)}{n^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{(n-2)(3n-2)}{n^2} \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{2(n-2)}{n} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + \frac{2(n-2)(3n-2)}{n^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{4(2n^2-6n+3)}{n^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} = \frac{2}{n^2} A r^{-\frac{2}{n}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r \frac{\partial U}{\partial r} \right). \quad (14)$$

Граничные условия для уравнения (14) определяются следующими соотношениями:

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right|_{r=a} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right|_{r=b} = 0, \quad \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} \right|_{r=a} = \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} \right|_{r=b} = 0. \quad (15)$$

Пусть случайная однородная функция $U(r, \varphi)$, с помощью которой задаётся случайное поле возмущений реологических свойств материала, представима в форме [5]

$$U(r, \varphi) = \lambda_0 J_0(r) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) J_k(r), \quad (16)$$

где $J_k(r)$ — функция Бесселя I рода целого порядка; λ_k, β_k — независимые случайные величины, причём $\langle \lambda_k \rangle = \langle \beta_k \rangle = 0$, $\langle \lambda_k^2 \rangle = \langle \beta_k^2 \rangle = 1$. Решение уравнения (14) можно искать в виде

$$F = \lambda_0 f_0(r) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r) (\lambda_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi). \quad (17)$$

Подставляя представления (16) и (17) в уравнение (14), для определения $f_k(r)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} r^2 f_0^{IV} - \frac{2(n-2)r}{n} f_0''' + \frac{(n-2)(3n-2)}{n^2} f_0'' - \frac{(n-2)(3n-2)}{n^2} \frac{1}{r} f_0' &= \frac{2}{n^2} A r^{-\frac{2}{n}+1} (r J_0(r) - 2 J_1(r)), \\ r^2 f_k^{IV} - \frac{2(n-2)r}{n} f_k''' + \left(\frac{(n-2)(3n-2)}{n^2} + \frac{2(n-2)}{n} k^2 \right) f_k'' - \frac{(n-2)(3n-2)(1+2k^2)}{n^2} \frac{f_k'}{r} + \\ + \left(\frac{4(2n^2-6n+3)}{n^2} + k^2 \right) \frac{k^2 f_k}{r^2} &= \frac{2}{n^2} A r^{-\frac{2}{n}} ((r^2 - 2k^2 - 2k) J_k(r) + 2r J_{k-1}(r)), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь производные вычисляются по переменной r . Решение уравнения (18) имеет такой вид:

$$f_k(r) = \sum_{l=1}^4 (A_{kl}(r) + C_{kl}) \omega_{kl}(r),$$

где $\omega_{kl}(r)$ — фундаментальное решение однородного уравнения, соответствующего (18); C_{kl} — постоянные, определяемые из граничных условий (15); $A_{kl}(r)$ — функции, определяемые методом вариации произвольных постоянных.

Далее были вычислены компоненты тензора напряжений согласно (5), (7), (13)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A \left(b^{-\frac{2}{n}} - r^{-\frac{2}{n}} \right) + \alpha \frac{\lambda_0 f_0'}{r} + \sqrt{2} \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k'}{r} - \frac{k^2 f_k}{r^2} \right) (\lambda_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi), \\ \sigma_\varphi &= A \left(b^{-\frac{2}{n}} - \left(1 - \frac{2}{n} \right) r^{-\frac{2}{n}} \right) + \alpha \lambda_0 f_0'' + \sqrt{2} \alpha \sum_{k=1}^{\infty} f_k'' (\lambda_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi), \\ \sigma_{r\varphi} &= \sqrt{2} \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k f_k}{r^2} - \frac{k f_k'}{r} \right) (-\lambda_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) \end{aligned} \quad (19)$$

и по известной формуле теории вероятностей были найдены дисперсии случайного поля напряжений:

$$\frac{D[\sigma_r]}{\alpha^2} = \frac{1}{r^2} (f_0')^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_k'}{r} - \frac{k^2 f_k}{r^2} \right)^2, \quad \frac{D[\sigma_\varphi]}{\alpha^2} = (f_0'')^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (f_k'')^2, \quad \frac{D[\sigma_{r\varphi}]}{\alpha^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{r^2} f_k - \frac{k}{r} f_k' \right)^2.$$

Таблица 1

Значения коэффициента вариации напряжения σ_φ на внутренней поверхности трубы

$\alpha \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8
0,1	2,01	1,59	1,31	1,12	0,97	0,86	0,77
0,2	4,02	3,18	2,62	2,24	1,94	1,72	1,54
0,3	6,03	4,77	3,93	3,36	2,91	2,58	2,31
0,4	8,04	6,36	5,24	4,48	3,88	3,44	3,08
0,5	10,05	7,95	6,55	5,60	4,85	4,30	3,85

Проведено исследование случайного поля напряжений при помощи коэффициента вариации. Получено, что наибольший разброс тангенциального напряжения σ_φ происходит на внутренней поверхности трубы. Здесь, как видно из табл. 1, коэффициент вариации $\frac{\sqrt{D[\sigma_\varphi]}}{\sigma_\varphi^\circ}$ для материалов с высоким показателем нелинейности ($n = 8$) находится в пределах от 0,77% ($\alpha = 0,1$) до 3,85% ($\alpha = 0,5$). Для случая низких показателей нелинейности ($n = 2$) разброс напряжения σ_φ около среднего напряжения немного больше. Здесь величина коэффициента вариации находится в пределах от 2,01% ($\alpha = 0,1$) до 10,05% ($\alpha = 0,5$).

Радиальное напряжение имеет наибольший разброс на срединной поверхности. Причем это значение на порядок меньше, чем наибольший разброс для тангенциального напряжения.

Выполним теперь исследование случайного поля скоростей деформаций ползучести. Используя формулу для вычисления дисперсии двух случайных величин [6]

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{XY},$$

где $K_{XY} = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle$, и формулу (9), имеем

$$D[\dot{\varepsilon}_\varphi] = D[\dot{\varepsilon}_r] = \frac{1}{4} \alpha^2 c^2 s_0^{2(n-1)} \left((\sigma_\varphi^\circ - \sigma_r^\circ)^2 + n^2 D[\sigma_\varphi^* - \sigma_r^*] + 2n(\sigma_\varphi^\circ - \sigma_r^\circ) \langle (\sigma_\varphi^* - \sigma_r^*) U \rangle \right). \quad (20)$$

Используя (19), вычислим

$$\sigma_\varphi^* - \sigma_r^* = \lambda_0 \left(f_0'' - \frac{f_0'}{r} \right) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_k'' - \frac{f_k'}{r} + \frac{k^2 f_k}{r^2} \right) (\lambda_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi).$$

Тогда моменты, входящие в выражение (20), будут вычисляться по следующим формулам:

$$D[\sigma_\varphi^* - \sigma_r^*] = \left(f_0'' - \frac{f_0'}{r} \right)^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_k'' - \frac{f_k'}{r} + \frac{k^2 f_k}{r^2} \right)^2,$$

$$\langle (\sigma_\varphi^* - \sigma_r^*) U \rangle = \left(f_0'' - \frac{f_0'}{r} \right) J_0(r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_k'' - \frac{f_k'}{r} + \frac{k^2 f_k}{r^2} \right) J_k(r).$$

Для математических ожиданий скоростей деформаций ползучести имеют место выражения

$$\langle \dot{\varepsilon}_\varphi \rangle = \langle -\dot{\varepsilon}_r \rangle = \dot{\varepsilon}_\varphi^\circ = \frac{1}{2} c s_0^{n-1} (\sigma_\varphi^\circ - \sigma_r^\circ), \quad \langle \dot{\varepsilon}_{r\varphi} \rangle = \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^\circ = 0.$$

В табл. 2 представлены значения величины $\frac{\sqrt{D[\dot{\varepsilon}_\varphi]}}{\langle \dot{\varepsilon}_\varphi \rangle}$ (в процентах), характеризующей относительный разброс скорости деформации в зависимости от переменных α и n . Как видно из таблицы, коэффициент вариации скорости деформации $\dot{\varepsilon}_\varphi$ с возрастанием n меняется незначительно, а зависимость этого коэффициента от параметра α является линейной.

Таблица 2

Значения коэффициента вариации скорости ползучести $\dot{\varepsilon}_\varphi$ на внешней поверхности трубы

$\alpha \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8
0,1	11,34	11,28	11,25	11,23	11,22	11,21	11,21
0,2	22,68	22,56	22,50	22,46	22,44	22,42	22,42
0,3	34,02	33,84	33,25	33,09	33,66	33,63	33,63
0,4	45,28	45,12	45,00	44,92	44,88	44,84	44,84
0,5	56,7	56,4	56,25	56,15	56,10	56,05	56,05

Таким образом, случайные вариации реологических свойств материала могут оказывать существенное влияние на оценку работоспособности толстостенных труб. Время до разрушения, вычисленное с учетом стохастических неоднородностей может оказаться существенно меньше по сравнению с обычным детерминированным прогнозом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Должковой, А. А. Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра [Текст] / А. А. Должковой, Н. Н. Попов, В. П. Радченко // ПМТФ. — 2006. — Т. 47, № 1. — С. 161–171. — ISSN 0869–5032.
2. Исуткина, В. Н. Сравнительный анализ решений стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы на основе методов малого параметра и Монте–Карло [Текст] / В. Н. Исуткина, А. Ю. Маргаритов // Вестн. Сам. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2006. — № 43. — С. 116–123. — ISBN 5–7964–0877–1.
3. Тимошенко, С. П. Теория упругости [Текст] / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М.: Наука, 1975. — 528 с.
4. Качанов, Л. М. Теория ползучести [Текст] / Л. М. Качанов. — М.: Физматгиз, 1960. — 455 с.
5. Лавренюк, В. И. Распределение напряжений около кругового отверстия в плоскости из стохастически неоднородного материала [Текст] / В. И. Лавренюк // Прикладная механика. — 1973. — Т. IX, Вып. 4. — С. 128–132.
6. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей [Текст] / Е. С. Вентцель. — 10-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2006. — 575 с. — ISBN 5–06–005688–0.

Самарский государственный технический университет, г. Самара
vera_isutkina@mail.ru

Поступила 05.07.2007