Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Беданоква, Математическое моделирование солевого режима почв с фрактальной структурой, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 102–109

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:08:11

УДК 517.958:531.34

С. Ю. Беданова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛЕВОГО РЕЖИМА ПОЧВ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

Предложены и исследованы линейные математические модели солевого режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе моделей лежат нагруженные дифференциальные уравнения дробного порядка.

1. Основные уравнения модели и определение начально-краевых условий. Значительный интерес представляет разработка математических моделей, учитывающих влияние фрактальной структуры почвы на их водный и солевой режимы. На важность установления функциональной связи между водным и солевым режимами почв в процессе совместного движения воды и солей при полном насыщении почвогрунтов с растворимыми солями обратили внимание многие исследователи [1, стр. 25].

В качестве уравнения одномерного движения солей рассматривалось дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + b(u_m - u), \quad (1)$$

где $u(x, y)$ — концентрация $c(x, t)$ [г/л] почвенного раствора в точке x почвенного слоя $0 < x < r$ мощности r в момент времени $t > 0$ [сут]; x — расстояние [м] от поверхности; $a = c_0/m_1$ — фактическая скорость движения воды в порах грунта; c_0 — постоянная скорость фильтрации [м/сут]; m_1 — порозность; u_m — предельная концентрация насыщения; b — коэффициент растворимости [1/сут]; D_k — коэффициент конвективной (фильтрационной) диффузии [м²/сут].

Уравнение (1) предполагает линейное движение солей и воды вдоль оси абсцисс x и независимость интенсивности растворения содержащихся в твёрдой фазе почвы солей от их объёма и поверхности. Из этого уравнения следует, что изменение во времени концентрации солей в любой точке x равна поступлению солей в результате разности концентрации почвенного раствора, переноса солей движущейся водой и вследствие растворения твёрдой фазы солей и поступления их в раствор.

При малых значениях коэффициента растворимости, когда рассматриваются хорошо растворимые соли и малое их содержание в твёрдой фазе, в уравнении (1) можно пренебречь числом $b(u_m - u)$ или заменить его выражением

$$f(u) = b \left[u_m - \frac{1}{r} \int_0^r u(x, t) dx \right]. \quad (2)$$

Известно, что почвенный раствор представляет собой структурированное коллоидное образование. В настоящее время разработаны методы, позволяющие наблюдать коллоидные структуры непосредственно в почвах и получать информацию о фрактальной размерности почв [2].

Уравнение движения (1) не учитывает, что почвогрунт, как правило, имеет фрактальную структуру [3]. Учёт этого фактора принципиально меняет уравнение движения солей, превращая его в дифференциальное уравнение движения солей дробного порядка следующего вида:

$$u_t = D_f \partial_{0x}^\alpha u(\xi, t) - a D_{0x}^{\alpha-n} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} + F[u], \quad (3)$$

где D_f — коэффициент фрактальной диффузии;

$$\partial_{0x}^\alpha u(\xi, t) = D_{0x}^{\alpha-n} \frac{\partial^n u(\xi, t)}{\partial \xi^n}, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N};$$

D_{0x}^β и ∂_{0x}^α — операторы дробного интегро-дифференцирования порядка $|\beta|$ по Риману—Лиувиллю и по М. Капуто порядка α [4], а $F[u] = b(u_m - u)$ или $F[u] = f(u)$.

При $\alpha = 2$ и $F[u] = b(u_m - u)$ уравнение (3) совпадает с моделью (1) движения почвенного раствора.

Как установлено в [2], «почвенные коллоидные структуры чаще всего представляют собой массовые фракталы». Показатель Порода, т. е. число χ в соотношении $\lg J(k) \sim \chi \lg k$, характеризующем зависимость интенсивности рассеяния нейтронов $\lg J(k)$ от передаваемого импульса k , при реализации метода малоуглового рассеяния нейтронов используют для нахождения фрактальной размерности объектов. Для массовых фракталов число χ совпадает со значением фрактальной размерности $\mu = D$.

Поскольку фрактальная размерность почв даёт интегральную характеристику их коллоидной структуры, то в первом приближении можно положить, что α как показатель порядка уравнения (3) пропорционален или совпадает с фрактальной размерностью D .

Анализ данных фрактальных размерностей зональных почв, полученных в работе [2] методом малоуглового рассеяния нейтронов, показывает, что D удовлетворяет неравенству $2 < D < 3,9$.

Основная цель этой работы — качественный анализ уравнения в частных производных дробного порядка α как математической модели движения солей для всех $\alpha \in]n-1, n]$ ($n \in \mathbb{N}$) при этом особый акцент сделан на случае, когда $2 < D < 3,9$.

При хорошо растворимых солях и малом их содержании в твёрдой фазе уравнения (1) и (3) можно заменить следующими уравнениями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_f \partial_{0x}^\alpha u(\xi, t) - a \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5)$$

В дальнейшем будем предполагать, что реализована процедура обезразмеривания зависимых и независимых переменных, а также всех параметров исследуемых задач. Предполагается также известным распределение концентрации почвенного раствора в начальный момент времени $t = 0$:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (6)$$

и начальная эпюра солесодержания такова, что $\tau(x) \in C[0, r] \cap C^2]0, r]$ в случае уравнения (4) и $\tau(x) \in C^n]0, r]$, $\tau^{(n)}(x) \in L[0, r]$ в случае уравнения (5).

Наряду с условием Коши в задачах оптимального управления водно-солевыми режимами важную роль играет нелокальное условие вида

$$\frac{1}{r} \int_0^r u(x, t) dx = \delta(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

где T — расчётное время.

Функция $\delta = \delta(t)$ — «математическое ожидание» содержания почвенного раствора (солей) в слое мощности r . Предполагается, что функция $\delta(t)$ принадлежит классу $C^1[0, T]$ функций, непрерывно дифференцируемых на временном сегменте $[0, T]$.

В классе достаточно гладких решений $u = u(x, t)$ из уравнения (3) в силу (7) имеем

$$\delta'(t) = \frac{D_f}{r} \int_0^r \partial_{0x}^\alpha u(\xi, t) dx - \frac{a}{r} \left[D_{0r}^{\alpha-n} u(\xi, t) - \frac{u(0, t)}{(n-\alpha+1)} r^{n-\alpha} \right] + \frac{1}{r} \int_0^r F(u) dx. \quad (8)$$

Из (8) в случае, когда $\alpha = 2$ $F[u] = f(u) = b[u_m - \delta(t)]$, непосредственным вычислением получаем

$$\delta'(t) = \frac{D_f}{r} [u_x(r, t) - u_x(0, t)] - \frac{a}{r} [u(r, t) - u(0, t)] + b[u_m - \delta(t)]. \quad (9)$$

Определяющее уравнение (9) порождает нелокальные краевые условия:

$$\begin{aligned} u(r, t) - u(0, t) &= P_0(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u_x(r, t) - u_x(0, t) &= P_1(t), & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть заданы функции $P_0(t)$, $P_1(t)$. Тогда среднее солесодержание $\delta(t)$ меняется со временем по закону

$$\delta'(t) + b\delta(t) = bu_m + \frac{1}{r} [D_f P_1(t) - aP_0(t)]. \quad (11)$$

Положим в уравнении (3) $F[u] = b[u_m - \delta(t)]$ и применим к обеим его частям оператор $D_{0x}^{n-\alpha}$ частного дифференцирования дробного порядка $n - \alpha$, в результате, принимая во внимание, что $D_{0x}^{n-\alpha} D_{0\xi}^{\alpha-n} = D_{0x}^0$, где D_{0x}^0 — единичный оператор, получим другую форму записи уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{0x}^{n-\alpha} u(\xi, t) = D_f \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} - a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x n} + b[u_m - \delta(t)] D_{0x}^{n-\alpha} 1. \quad (12)$$

Нетрудно показать, что

$$D_{0x}^{n-\alpha} 1 = \frac{x^{\alpha-n}}{\Gamma(1+\alpha-n)}, \quad \frac{1}{r} \int_0^r D_{0x}^{n-\alpha} 1 dx = \frac{x^{\alpha-n}}{\Gamma(2+\alpha-n)}, \quad (13)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Так как $0 \leq n - \alpha < 1$, то по определению

$$D_{0x}^{n-\alpha} u(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial x} D_{0x}^{n-\alpha-1} u(\xi, t)$$

и, стало быть,

$$\int_0^r D_{0x}^{n-\alpha} u(\xi, t) dx = D_{0r}^{n-\alpha} u(\xi, t) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha-n)} \int_0^r \frac{u(\xi, t) d\xi}{(r-\xi)^{n-\alpha}}. \quad (14)$$

Проинтегрируем обе части равенства (12) по x от 0 до r . В результате на основании (10), (13) и (14) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{0r}^{n-\alpha-1} u(\xi, t) = D_f \left[\frac{\partial^{n-1} u(r, t)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} u(0, t)}{\partial x^{n-1}} \right] - a P_0(t) + \frac{b[u_m - \delta(t)]}{\Gamma(2+\alpha-n)} r^{\alpha-n+1}. \quad (15)$$

Уравнение (15) порождает нелокальное условие

$$\left. \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=r} - \left. \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=0} = P_{n-1}(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (16)$$

Если допустить, что водно-солевой режим почвенного слоя таков, что

$$D_{0r}^{n-\alpha-1} u(\xi, t) = \lambda_\alpha \delta(t),$$

где λ_α — постоянный коэффициент пропорциональности, то мы приходим к нелокальному условию следующего вида:

$$u(r, t) = \frac{\lambda_\alpha}{\Gamma(n-\alpha)} r^{n-1-\alpha} \delta(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (17)$$

При соблюдении условий (16) и (17) уравнение движения (15) переписывается следующим образом:

$$\lambda_\alpha \delta'(t) + \frac{b}{\Gamma(2+\alpha-n)} r^{\alpha-n+1} \delta(t) = D_f P_{n-1}(t) - a P_0(t) + \frac{b u_m}{\Gamma(2+\alpha-n)} r^{\alpha-n+1}. \quad (18)$$

2. Установившийся модельный вариант распределения солей в почвенном слое. Стационарные варианты уравнения (4) и (5) соответственно имеют вид

$$u''(x) - \omega u'(x) = 0, \quad \omega = \frac{a}{D_k}, \quad (19)$$

$$\partial_{0x}^\alpha u(\xi) - \omega_\alpha u'(x) = 0, \quad \omega_\alpha = \frac{a}{D_f}. \quad (20)$$

Из (19) следует, что градиент $v(x) = u'(x)$ концентрации солей в почвенном слое толщины r меняется по следующему экспоненциальному закону:

$$v(x) = v(0) \exp(\omega x). \quad (21)$$

Уравнение (20) эквивалентно системе:

$$D_{0x}^{\alpha-n} \frac{d^{n-1} v(\xi)}{d\xi^{n-1}} - \omega_\alpha v(x) = 0, \quad (22)$$

$$u'(x) = v(x), \quad 0 < x \leq r. \quad (23)$$

К обеим частям равенства (22) применим оператор $D_{0x}^{n-\alpha}$. В результате получим

$$\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} = \omega_\alpha D_{0x}^{n-\alpha} v(\xi), \quad 0 \leq n - \alpha < 1. \quad (24)$$

Любое решение $v = v(x)$ уравнения (24) при $n \geq 2$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} - \omega_\alpha D_{0x}^{n-1-\alpha} v(\xi) \right] = 0. \quad (25)$$

Рассмотрим алгоритм решения уравнения (25) при

$$2 < \alpha \leq 3 \quad (n = 3). \quad (26)$$

1. Условие (26) означает, что градиент концентрации солей должен удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dx} [v'(x) - \omega_\alpha D_{0x}^{2-\alpha} v(\xi)] = 0. \quad (27)$$

2. Уравнение (27) редуцируется к уравнению

$$v'(x) - \omega_\alpha D_{0x}^{2-\alpha} v(\xi) = c_2, \quad (28)$$

где

$$c_2 = \lim_{x \rightarrow 0} v'(x). \quad (29)$$

3. Из равенства (28), после применения к обеим его частям оператора D_{0x}^{-1} , имеем

$$v(x) - \omega_\alpha D_{0x}^{1-\alpha} v(\xi) = c_2 x + c_1, \quad (30)$$

причём

$$c_1 = v(0). \quad (31)$$

4. Через $V_\alpha v$ обозначим левую часть уравнения (30). На основании формулы Хилле—Тамаркина [4], которая обращает интегральный оператор Вольтерра V_α , любое решение $v(x)$ уравнения (30) имеет вид

$$v(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x (c_1 + c_2 t) E_{\alpha-1} [\omega_\alpha (x-t)^{\alpha-1}] dt. \quad (32)$$

Здесь

$$E_\rho [z; \mu] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\mu + j/\rho)}, \quad E_{1/\rho} [z] = E_\rho [z; 1], \quad \rho > 0,$$

функция типа Миттаг—Леффлера и функция Миттаг—Леффлера.

Прямые расчёты показывают, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^x E_{\alpha-1} [\omega_\alpha (x-t)^{\alpha-1}] dt &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega_\alpha^j}{\Gamma(1 + (\alpha-1)j)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)j} dt = \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^x dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\omega_\alpha x^{\alpha-1})^j}{\Gamma(1 + (\alpha-1)j)} = E_{\alpha-1} [\omega_\alpha x^{\alpha-1}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \int_0^x t E_{\alpha-1} [\omega_\alpha (x-t)^{\alpha-1}] dt &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega_\alpha^j}{\Gamma(1+(\alpha-1)j)} \frac{d}{dx} x^{2+(\alpha-1)j} \int_0^1 \xi (1-\xi)^{(\alpha-1)j} d\xi = \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega_\alpha^j (2+(\alpha-1)j)}{\Gamma(1+(\alpha-1)j)} x^{1+(\alpha-1)j} B(2, 1+\alpha j-j) = \\
 &= x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega_\alpha^j (2+(\alpha-1)j)}{\Gamma(3+(\alpha-1)j)} x^{(\alpha-1)j} = x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\omega_\alpha x^{\alpha-1})^j}{\Gamma(2+(\alpha-1)j)} = x E_{1/(\alpha-1)} [\omega_\alpha x^{\alpha-1}; 2].
 \end{aligned}$$

Поэтому формулу (32) можно переписать в виде

$$v(x) = E_{\alpha-1} [\omega_\alpha x^{\alpha-1}] c_1 + x E_{1/(\alpha-1)} [\omega_\alpha x^{\alpha-1}; 2] c_2. \quad (33)$$

Как замечено в работе [3], «в целом ряде случаев значение фрактальной размерности достигает 3, что является предельной величиной для фрактальных объектов», и «такое значение может характеризовать переход от массовых к поверхностным фракталам» [6]. Величина 3 является предельной и для уравнений (20) и (22). При $\alpha = 3$ эти уравнения записываются следующим образом:

$$u'''(x) - \omega_3 u'(x) = 0; \quad (34)$$

$$v''(x) - \omega_3 v(x) = 0. \quad (35)$$

Единственное решение $v(x)$ уравнения (35), удовлетворяющее условию Коши (29), (31), задаётся формулой

$$v(x) = c_1 \operatorname{ch}(\sqrt{\omega_3} x) + c_2 \operatorname{sh}(\sqrt{\omega_3} x). \quad (36)$$

В силу (23) и (36) решение $u(x)$ задачи Коши:

$$u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1, \quad u''(0) = c_2 \quad (37)$$

для стационарного уравнения движения почвенного раствора (33) однозначно определяется формулой

$$u(x) = c_0 + (c_1 \operatorname{sh}(\sqrt{\omega_3} x) + c_2 \operatorname{ch}(\sqrt{\omega_3} x) - c_2) / \sqrt{\omega_3}. \quad (38)$$

В случае же уравнения (19) решение $u(x)$ задачи Коши: $u(0) = c_0$, $u'(0) = c_1$ имеет вид

$$u(x) = c_0 + \frac{c_1}{\omega} [\exp(\omega x) - 1] \quad (39)$$

Из (37)–(39) следует, что эти решения, будучи близкими на поверхности $x = 0$ почвы, существенно отличаются вдали от неё.

Приведём теперь схему решения задачи для уравнения (20) в общем случае, когда $n > 3$ и $n-1 < \alpha < n$.

Пусть $m = n-1$, $\beta = n-\alpha$. Очевидно, $0 < \beta < 1$ и уравнение (22) эквивалентно уравнению

$$D_{0x}^{-\beta} \frac{d^m v(\xi)}{d\xi^m} - \omega_\alpha v(x) = 0, \quad m > 2. \quad (40)$$

Известно, что

$$D_{0x}^{-\beta} v^{(m)}(\xi) = D_{0x}^{m-\beta} v(\xi) - \sum_{j=0}^m u^{(m-j)}(0) \frac{x^{\beta-j}}{\Gamma(1+\beta-j)}.$$

Поэтому уравнение (40) можно переписать в виде

$$D_{0x}^{\alpha-1} v(\xi) - \omega_\alpha v(x) = h(x), \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \sum_{j=1}^m \frac{c_{m-j} x^{\beta-j}}{\Gamma(1+\beta-j)}, \\
 u^{(m-j)}(0) &= c_{m-j}, \quad j = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \quad (42)$$

Уравнение (41) было объектом исследования работы [6], и его решение, удовлетворяющее условию (42), можно выписать в явном виде через функции типа Миттаг—Леффлера.

3. Нестационарная математическая модель солепереноса. Здесь мы ограничимся рассмотрением модели, в основе которой лежит уравнение

$$\delta'(t) = D_f \partial_{0x}^\alpha u(\xi, t) - au_x, \quad 1 < \alpha < 2, \quad (43)$$

с граничным условием

$$D_f u_x(0, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (44)$$

Решение уравнения (43) принимается за приближенное решение уравнения (5).

Пусть

$$w(x, t) = D_f u_x. \quad (45)$$

Тогда уравнение (43) можно переписать в виде

$$D_{0x}^{\alpha-1} w(\xi, t) - \lambda w(x, t) = \frac{\delta'(t)}{D_f}, \quad \lambda = \frac{a}{D_f}, \quad (46)$$

а граничное условие (44), в силу (45), можно записать в форме

$$w(0, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (47)$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная на сегменте $[0, T]$ функция.

Схема построения решения уравнения (46) с граничным условием (47) выглядит следующим образом.

1. Поскольку $\beta = \alpha - 1 \in]0, 1]$,

$$D_{0x}^{-\beta} D_{0\xi}^\beta w(\xi_1, t) = w(x, t) - \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\beta-1} w(\xi, t)$$

и предел в правой части равен нулю, то уравнение (46) можно записать в виде

$$w(x, t) - \lambda D_{0x}^{-\beta} w(\xi, t) = \frac{\delta'(t)x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}. \quad (48)$$

2. Из уравнения (48) по формуле Хиле—Тамаркина получим

$$w(x, t) = \frac{\delta'(t)}{\Gamma(1+\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x t^\beta E_\beta [\lambda(x-t)^\beta] dt. \quad (49)$$

К обеим частям равенства (49) применим оператор D_{0x}^{-1} . Тогда согласно (45) будем иметь

$$D_f u(x, t) = \frac{\delta'(t)}{\Gamma(1+\beta)} \int_0^x t^\beta E_\beta [\lambda(x-t)^\beta] dt = \frac{\delta'(t)}{\Gamma(1+\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(1+\beta j)} \int_0^x t^\beta E_\beta [\lambda(x-t)^\beta] dt.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\int_0^x t^\beta (x-t)^{\beta j} dt = x^{\beta(1+j)+1} \int_0^1 \xi^\beta (1-\xi)^{\beta j} d\xi = x^{\beta(1+j)+1} B(\beta+1, \beta j+1),$$

где $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ — бета-функция, заключаем, что

$$D_f u(x, t) = \delta'(t) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j x^{\beta+1+\beta j}}{\Gamma(2+\beta+\beta j)} = \delta'(t) x^{\beta+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^\beta)^j}{\Gamma(2+\beta+\beta j)}.$$

Стало быть,

$$D_f u(x, t) = \delta'(t) x^{\beta+1} E_{1/\beta} [\lambda x^\beta; \beta+2]. \quad (50)$$

3. Равенство (50) приводит к уравнению

$$D_f \delta(t) = \delta'(t) a_r^\beta \quad (51)$$

с коэффициентами $a_r^\beta = \frac{1}{r} \int_0^r x^{\beta+1} E_{1/\beta} [\lambda x^\beta; \beta+2] dx$.

Число

$$a_r^\beta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{r \Gamma(2+\beta+\beta j)} \int_0^r x^{\beta+1+\beta j} dx = r^{\beta+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda r^\beta)^j}{\Gamma(3+\beta+\beta j)} = r^{\beta+1} E_{1/\beta} [\lambda r^\beta; \beta+3]$$

отлично от нуля при $a \geq 0$. При $a=0$ оно равно $\frac{r^{\beta+1}}{\Gamma(3+\beta)}$.

Согласно (6), (7) условие Коши для уравнения (51) задаётся равенством

$$\delta(0) = \bar{\tau}, \quad (52)$$

где $\bar{\tau} = \frac{1}{r} \int_0^r \tau(x) dx$ среднее значение концентрации почвенного раствора.

С учетом (52) из (51) получаем

$$\delta(t) = \bar{\tau} \exp\left(\frac{D_f}{a_r^\beta} t\right), \quad \delta'(t) = \frac{\bar{\tau} D_f}{a_r^\beta} \exp\left(\frac{D_f}{a_r^\beta} t\right). \quad (53)$$

4. Подставляя найденное значение $\delta'(t)$ из (53) в равенство (50), приходим к эффективной, хорошо реализуемой на компьютере, формуле, определяющей распределение солей в почвенном слое мощности r :

$$u(x, t) = \frac{\bar{\tau} E_{1/\beta} [\lambda x^\beta; 2+\beta]}{E_{1/\beta} [\lambda r^\beta; 3+\beta]} \left(\frac{x}{r}\right)^{\beta+1} \exp\left\{\frac{D_f t}{r^{\beta+1} E_{1/\beta} [\lambda r^\beta; 3+\beta]}\right\}. \quad (54)$$

4. Нестационарный вариант модели (3). За приближенное решение $u(x, t)$ уравнения (3) в случае, когда $F[u]$ совпадает с функционалом $f(u)$, определённым по формуле (2), примем решение уравнения

$$\delta'(t) + b\delta(t) = D_f \partial_{0x}^\alpha u(\xi, t) - a D_{0x}^{\alpha-n} u_\xi(\xi, t) + b u_m, \quad (55)$$

удовлетворяющее соответствующим начальному и краевому условиям типа (6), (16) и (17).

Исследование начально-краевых задач для уравнения (55) приводится по указанным ранее схемам, выражая функцию $w = D_f u_x$ через $\delta'(t) + b\delta(t)$.

В случае, когда задано нелокальное краевое условие

$$\delta(t) = \bar{\tau} \exp(-bt), \quad 0 \leq t \leq T,$$

уравнение (55) переходит в уравнение

$$D_f \partial_{0x}^\alpha u(\xi, t) - a D_{0x}^{\alpha-n} u_\xi(\xi, t) = -b u_m,$$

которое можно свести к виду уравнений, исследованных в работе [7].

Автор выражает благодарность профессору А.М. Нахушеву за постановку задач и ценные советы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аверьянов, С. Ф. Борьба с засолением орошаемых земель [Текст] / С. Ф. Аверьянов. — М.: Колос, 1978. — 288 с.
2. Сербина, Л. И. Об одной математической модели переноса субстанции во фрактальных средах [Текст] / Л. И. Сербина // Мат. моделирование. — 2003. — Т. 15, № 9. — С. 17–28.
3. Фрактальные коллоидные структуры в почвах различной зональности [Текст] / Г. Н. Федотов, Ю. Д. Третьяков, В. К. Иванов и др. // Докл. РАН. — 2005. — Т. 405, № 3. — С. 351–354. — ISSN 0869–5652.

4. Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение [Текст] / А. М. Нахушев. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
5. Кольцова, Э. М. Нелинейная динамика термодинамики необратимых процессов в химии и химической технологии [Текст] / Ю. Д. Третьяков, Л. С. Гордеев, А. А. Вертегел. — М.: Химия, 2001. — 408 с.
6. Baret, J. N. Differential equation of non-integer [Text] / J. N. Baret // Canad. J. Math. — 1954. — Vol. 6, No. 4. — P. 529–541.
7. Беданова, С. Ю. Задача Коши и нелокальная краевая задача для обобщённых дробных осцилляционных уравнений [Текст] / С. Ю. Беданова // Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. — 2005. — Т. 8, № 1. — С. 9–15.

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик
pniipma333@mail.com

Поступила 07.11.2006