Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. И. Лютахин, Экстремумы вектор-функции индукции вращательно-симметричного магнитного поля стационарного контурного тока в “сферическом” многосредном пространстве, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 116–122

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:36:34

УДК 658.011.054

Ю. И. Лютахин

ЭКСТРЕМУМЫ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ИНДУКЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ СТАЦИОНАРНОГО КОНТУРНОГО ТОКА В «СФЕРИЧЕСКОМ» МНОГОСРЕДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Предлагается численно-аналитический метод расчёта экстремальных значений индукции магнитного поля стационарного кругового контурного тока в сферическом пространстве магнитно-разнородных сред. Для случая экваториального расположения витка с током условия экстремума вектор-функции индукции доведены до законченного аналитического решения в явных функциях.

Особенности функционирования, а также большое разнообразие конструкций электромагнитных систем со сферической геометрией, применяемых в электроприводах сканирующих, гироскопических, навигационных и робототехнических устройств; в установках, обеспечивающих электромагнитную совместимость режимов работы электрооборудования, требуют создания адекватных математических моделей, малозатратных методов проектирования и методик расчёта.

Существующие модели [1–13] дают полезную информацию для решения конкретных задач, однако они не учитывают возможности произвольного варьирования числа сред; накладывают ограничения на значения магнитных проницаемостей материалов сред; не позволяют определять экстремальные значения индукции магнитного поля, характеризующие магнитный режим работы магнитопровода электромагнитной системы. Нет опубликованных работ по методике инженерного расчёта и проектирования аналогичных систем.

Характер и поведение поля электромагнитной системы полностью определяет её качественные свойства и количественные характеристики, параметры. По этой причине одним из эффективных направлений исследований является математическое моделирование электромагнитных полей с доведением конечного результата до выражений в явных функциях и последующее создание САПР. При этом, в силу сложности электромагнитных процессов, целесообразным является использование при проектировании моделей магнитных полей стационарных токов с последующим уточнением на основе теоретической и экспериментальной коррекции методик расчёта.

Электромагнитная система

С этой целью целесообразным является использование классического исследования вектор-функций, описывающих электромагнитное поле на максимум и минимум [14–17].

Для облегчения решения поставленной краевой задачи, представим реальную электромагнитную систему в виде модели: круговой, бесконечно тонкий виток со стационарным током осесимметрично расположен в одной из областей пространства, разделённого софокусными, сферическими поверхностями на произвольное количество областей, занятых магнитноразнородными изотропными средами (см. рис.). Поле же, созданное током реальной катушки с конечным поперечным сечением, определяется суперпозицией полей совокупности бесконечно тонких витков [12, 16, 18].

На основании теории классической электродинамики и решения краевой задачи, поле в любой точке области определяется суперпозицией полей возбуждения и искажения. Векторный магнитный потенциал — из выражения

$$\vec{A}^{(p)} = \vec{A}^{(p)'} + \vec{A}^{(p)''}. \quad (1)$$

Индукция магнитного поля — из выражения

$$\vec{B}^{(p)} = \text{rot } \vec{A}^{(p)}. \quad (2)$$

С учётом вращательно-симметричной геометрии имеем

$$\vec{A}^{(p)} = A_\varphi^{(p)} \vec{i}_\varphi; \quad \vec{B}^{(p)} = \vec{i}_r B_r^{(p)} + \vec{i}_\theta B_\theta^{(p)}, \quad (3)$$

где $\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_\varphi$ — ортогональные орты сферической системы координат; p — индекс среды.

Векторный потенциал поля возбуждения бесконечно-тонкого кругового витка в однородном и изотропном пространстве с учётом вращательно-симметричной геометрии определяется из выражения [1, 19]:

$$\vec{A} = \vec{i}_\varphi \frac{\mu_p I a^2 r \sin \theta}{(z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2)^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{2n} \frac{\frac{1}{2} + i}{1 + i} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j} \left(\frac{2ar \sin \theta}{z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2} \right)^{2n}, \quad (4)$$

где μ_p — абсолютная магнитная проницаемость p -среды магнитной системы, Гн/м; $a = r_c$ — радиус окружности контура тока, м; I — величина тока в витке, А; z_0 — сдвиг плоскости витка вдоль оси $\theta = 0$; $p = 0, 1, \dots, N$ — индекс среды системы; $n = 0, 1, \dots, \infty$; $i = 0, 2, \dots, 2n$; $j = 1, 2, \dots, n+1$ — нечетные индексы; r, θ, φ — координаты сферической системы. Область определения функции (4) — все бесконечное пространство $r \geq 0$; $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, за исключением контура тока.

Компоненты вектора индукции $\vec{B}^{(p)'}$ неискажённого магнитного поля витка с током в p -среде пространства с учётом выражения (2) определяются следующим образом:

$$B_r^{(p)'}(r; \theta) = \frac{2\mu_p I a^2 (r \cos \theta - z_0)}{(z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2)^{3/2} (z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2n} \frac{\frac{1}{2} + i}{1 + i} \times \\ \times \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j} \left(\frac{2ar \sin \theta}{z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2} \right)^{2n} (n+1), \quad (5)$$

$$B_\theta^{(p)'}(r; \theta) = \frac{-\mu_p I a^2 r \sin \theta}{(z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2)^{3/2} (z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2n} \frac{\frac{1}{2} + i}{1 + i} \times \\ \times \frac{2(n+1)a^2 - (z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta)(2n+1)}{z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j} \left(\frac{2ar \sin \theta}{z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2} \right)^{2n}. \quad (6)$$

Область определения функций (5) и (6) та же, что и для функции (4).

Согласно принципу наложения или суперпозиции неискажённого поля и поля искажения [1, 12, 16, 18], векторный потенциал поля искажения обусловленного, лишь неоднородностью пространства, является решением уравнения Лапласа

$$\Delta \vec{A}^{(p)''} = 0. \quad (7)$$

В сферической системе координат, во вращательно-симметричном случае, система трёх скалярных уравнений Лапласа, соответствующая векторному уравнению (7), эквивалентна одному скалярному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных относительно одной неизвестной (φ — компоненты векторного потенциала), а остальные его компоненты $A_r^{(p)''} = A_\theta^{(p)''} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_\varphi^{(p)''}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_\varphi^{(p)''}}{\partial \theta} \right) - \frac{A_\varphi^{(p)''}}{\sin^2 \theta} = 0. \quad (8)$$

С использованием метода разделения переменных, общее решение уравнения (8) представляется комбинацией его частных решений вида

$$A_\varphi^{(p)''}(r; \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{n+1}^{(p)} r^{n+1} + D_{n+1}^{(p)} r^{-n-2} \right) P_{n+1}^1(\cos \theta). \quad (9)$$

Компоненты индукции магнитного поля искажения в p -среде определяются, с учётом формулы (2), из выражений

$$B_r^{(p)''}(r; \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{n+1}^{(p)} r^n + D_{n+1}^{(p)} r^{-n-3} \right) \left[P_{n+1}^1(\cos \theta) - P_{n-1}^1(\cos \theta) \right], \quad (10)$$

$$B_{\theta}^{(p)''}(r; \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{n+1}^{(p)} r^n (n+2) - D_{n+1}^{(p)} r^{-n-3} (n+1) \right) P_{n+1}^1(\cos \theta), \quad (11)$$

где $C_n^{(p)}$ и $D_n^{(p)}$ — постоянные коэффициенты интегрирования, определяемые для каждой среды системы из решения краевой задачи преломления магнитного поля; $P_{n+1}^1(\cos \theta)$ — присоединённые функции Лежандра первого рода. Из условия инвариантности тангенциальной составляющей напряжённости $\vec{H}$ магнитного поля при переходе через границу раздела двух сред p и $p+1$ [17, 19] имеем

$$H_{\theta}^{(p)}(r_{p,p+1}; \theta) = H_{\theta}^{(p+1)}(r_{p,p+1}; \theta), \quad (12)$$

где $r_{p,p+1}$ — радиус граничной сферы. С учётом $\vec{B}^{(p)} = \mu_p \vec{H}^{(p)}$, из выражений (2), (3), (6) и (11) получается первая бесконечная подсистема алгебраических уравнений, содержащая $n(N-1)$ уравнений:

$$\mu_p^{-1} \left(C_{n+1}^{(p)} (n+2) r_{p,p+1}^n - D_{n+1}^{(p)} (n+1) r_{p,p+1}^{-n-3} \right) = \mu_{p+1}^{-1} \left(C_{n+1}^{(p+1)} (n+2) r_{p,p+1}^n - D_{n+1}^{(p+1)} (n+1) r_{p,p+1}^{-n-3} \right). \quad (13)$$

Из условия инвариантности модуля векторного потенциала при переходе через границу раздела сред

$$|\vec{A}^{(p)}(r_{p,p+1}; \theta)| = |\vec{A}^{(p+1)}(r_{p,p+1}; \theta)| \quad (14)$$

с учётом выражений (1), (4), (9) получается вторая бесконечная подсистема, содержащая $n(N-1)$ алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \left(C_{n+1}^{(p+1)} - C_{n+1}^{(p)} \right) r_{p,p+1}^{n+1} + \left(D_{n+1}^{(p+1)} - D_{n+1}^{(p)} \right) r_{p,p+1}^{-n-2} = & \frac{(2n+3)(\mu_p - \mu_{p+1}) I a^2 r_{p,p+1}}{2(n+2)(n+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{2s} \frac{\frac{1}{2} + i}{1+i} \times \\ & \times \prod_{j=1}^{s+1} \frac{2j-1}{2j} (2a r_{p,p+1})^{2s} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2s+2} \theta P_{n+1}(\cos \theta) d\theta}{(z_0^2 + r_{p,p+1}^2 - 2z_0 r_{p,p+1} \cos \theta + a^2)^{2s+3/2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как поле конечно при $r = 0$, и неограниченно мало при $r \rightarrow \infty$, то подсистема (15) дополняется уравнениями: $D_{n+1}^{(1)} = 0$ и $C_{n+1}^{(N)} = 0$; здесь $p = 1$; $p = N$ — индексы крайних внутренней и внешней сред магнитной системы.

Для случая расположения витка в экваториальной плоскости $z_0 = 0$ правая часть уравнений (15) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} b = - \frac{\pi(2n+3)(\mu_p - \mu_{p+1}) I a}{4\sqrt{\pi}(n+2)(n+1) \sqrt{r_{p,p+1}^2 + a^2}} \sum_{s=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{2s} \frac{\frac{1}{2} + i}{1+i} \prod_{j=1}^{s+1} \frac{2j-1}{2j} \left(\frac{2a r_{p,p+1}}{r_{p,p+1}^2} \right)^{2s+1} \left(\frac{1}{s+2} \right) \times \\ \times \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{n}{(s+3+k)2} \right) \left(1 - \frac{n}{(s+1+k)2} \right) \left(1 + \frac{n}{2(1+k)} \right) \left(1 + \frac{n}{1-2k} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, составляя систему уравнений из подсистемы (13) и подсистемы (15), получаем $2n$ уравнений: $D_{n+1}^{(1)} = 0$ и $C_{n+1}^{(N)} = 0$. Принимая во внимание (16), можно определить постоянные C и D , а, следовательно, магнитную индукцию поля искажения. Модуль результирующей индукции магнитного поля в любой точке магнитной системы определяется из выражения

$$|\vec{B}^{(p)}| = \sqrt{\left(B_r^{(p)'} + B_r^{(p)''} \right)^2 + \left(B_{\theta}^{(p)'} + B_{\theta}^{(p)''} \right)^2}. \quad (17)$$

Условие экстремума векторной функции записывается в виде [16, 17]:

$$\frac{d\vec{B}}{d\vec{r}} = 0, \quad (18)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор. Направление дифференцирования функции $\vec{B}$ осуществляется вдоль единичного вектора $\vec{i}_r$ для радиус-вектора. Производная по этому направлению определяется из выражения

$$\frac{d\vec{B}}{d\vec{r}} = (\vec{i}_r \nabla) \vec{B}. \quad (19)$$

Так как в конкретном случае магнитное поле имеет вращательно-симметричную геометрию (3), с учётом [16] имеем

$$(\vec{i}_r \nabla) \vec{B} = \frac{1}{2} \left[\text{rot}(\vec{B} \times \vec{i}_r) + \text{grad}(\vec{B} \vec{i}_r) - \vec{B}(\text{div} \vec{i}_r) + \vec{i}_r(\text{div} \vec{B}) - \vec{B} \times (\text{rot} \vec{i}_r) - \vec{i}_r \times (\text{rot} \vec{B}) \right] \quad (20)$$

В силу соленоидальности магнитного поля $\text{div} \vec{B} = 0$, а так как, кроме того, $\text{div} \vec{i}_r = 0$, то $\text{rot} \vec{i}_r = 0$.

В данном случае

$$\vec{B} \times \vec{i}_r = -B_\theta \vec{i}_\varphi, \quad \vec{B} \vec{i}_r = B_r. \quad (21)$$

Тогда с учётом выражений (21) можно записать

$$\frac{d\vec{B}}{d\vec{r}} = \frac{1}{2} \left[\text{rot}(-B_\theta \vec{i}_\varphi) + \text{grad} B_r - \vec{i}_r \times (\text{rot} B) \right]. \quad (22)$$

В сферической системе координат с учётом выражения (3) и условия

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = 0 \quad (23)$$

можно записать

$$\frac{d\vec{B}}{d\vec{r}} = \frac{\vec{i}_r}{2} \left[\frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + B_\theta \text{ctg} \theta \right) \right] + \vec{i}_\theta \left(\frac{B_\theta}{r} + \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right). \quad (24)$$

Векторному уравнению (18) соответствует с учётом выражения (24) система двух скалярных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sin \theta \left(r \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right) - B_\theta \cos \theta = 0 \\ B_\theta + r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

в которой частные производные от компонент вектора индукции магнитного поля для p -среды с учётом выражений (1), (2), (17) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r^{(p)'}}{\partial r} = & \frac{2\mu_p I a^2}{(z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta)^{0,5}} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{2n} \frac{0,5+i}{1+i} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j} \frac{(n+1)(2ar \sin \theta)^{2n}}{(z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2)^{2n+1,5}} \times \\ & \times \left\{ \cos \theta + (r \cos \theta - z_0) \left[\frac{z_0 \cos \theta - r}{z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta} + \frac{2n}{r} + \frac{(2n+1,5)(2z_0 \cos \theta - 2r)}{z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2} \right] \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B_r^{(p)''}}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{n+1}^{(p)} n r^{n-1} - D_{n+1}^{(p)} (n+3) r^{-n-4} \right) \left[(n+1) P_{n+2}^1(\cos \theta) - (n+1) \cos \theta P_{n+1}^1(\cos \theta) \right] (\sin \theta)^{-1}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\theta^{(p)'}}{\partial \theta} = & \frac{-\mu_p I a^2 r \sin \theta}{(z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta)^{0,5}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2ar \sin \theta)^{2n}}{(z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2)^{2n+2,5}} \prod_{i=0}^{2n} \frac{0,5+i}{1+i} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j} \times \\ & \times \left\{ (2n+1) 2z_0 r \sin \theta + \left[2(n+1)a^2 - (z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta)(2n+1) \right] \left[\text{ctg} \theta (1+2n) - z_0 r \sin \theta \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\frac{1}{z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta} + \frac{(2n+2,5)^2}{z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2} \right) \right] \right\}, \quad (28) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B_{\theta}^{(p)''}}{\partial \theta} = -(\sin \theta)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{n+1}^{(p)} r^n (n+2) - D_{n+1}^{(p)} r^{-n-3} (n+) \right) \left[(n+1) P_{n+2}^1(\cos \theta) - (n+2) \cos \theta P_{n+1}^1(\cos \theta) \right], \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{\theta}^{(p)'}}{\partial r} = & \frac{-\mu_p I a^2 r \sin \theta}{(z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta)^{0,5}} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{2n} \frac{0,5+i}{1+i} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j} \frac{(2ar \sin \theta)^{2n}}{(z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2)^{2n+2,5}} \times \\ & \times \left\{ (2z_0 \cos \theta - 2r)(2n+1) + \left[2(n+1)a^2 - (z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta)(2n+1) \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{2n+1}{r} + \frac{(z_0 \cos \theta - r)}{z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta} + \frac{(2n+2,5)(2z_0 \cos \theta - 2r)}{z_0^2 + r^2 - 2z_0 r \cos \theta + a^2} \right] \right\}, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B_{\theta}^{(p)''}}{\partial r} = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{n+1}^{(p)} r^{n-1} (n+2)n + D_{n+1}^{(p)} r^{-n-4} (n+3)(n+1) \right) P_{n+1}^1(\cos \theta). \quad (31)$$

После подстановки (3) (6), (26)–(31) в (25) получим систему двух алгебраических уравнений с неизвестными r и θ из которой определяются пары r и θ , являющиеся координатами точек, в которых индукция магнитного поля B имеет экстремумы.

Таким образом, для оценки состояния магнитной системы p -среды получена зависимость в виде (25), которая позволяет определить индукцию магнитного поля только в той точке, где она имеет экстремальное значение.

Для случая, когда контур витка с током лежит в экваториальной ($z_0 = 0$) плоскости магнитной системы (из физических соображений ясно, что точки максимума лежат в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$), необходимо решить второе уравнение системы (25).

Для этого представим второе уравнение системы (25) в виде

$$B'_{\theta} + r \frac{\partial B'_{\theta}}{\partial r} = - \left(B''_{\theta} + r \frac{\partial B''_{\theta}}{\partial r} \right). \quad (32)$$

Подставляя в формулу (32) выражения (6), (30), (31), после преобразований для p -среды получим

$$\begin{aligned} B'_{\theta} + r \frac{\partial B'_{\theta}}{\partial r} = & - \frac{\mu_p I a^2}{(r^2 + a^2)^{2,5}} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{2n} \frac{0,5+i}{1+i} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{2j-1}{2j} \left(\frac{2ar}{r^2 + a^2} \right)^{2n} \left[2a^2(n+1)(1+2n) - \right. \\ & \left. - r^2(2n+1)(3+2n) + \frac{2r^4(2n+1)(2n+2,5) - 4a^2 r^2(n+1)(2n+2,5)}{r^2 + a^2} \right], \quad (33) \end{aligned}$$

$$- \left(B''_{\theta} + r \frac{\partial B''_{\theta}}{\partial r} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}^1(\cos \theta) \left[C_{n+1}^{(p)} (n+1)(n+2)r^n + D_{n+1}^{(p)} (n+1)(n+2)r^{-n-3} \right]. \quad (34)$$

Согласно [19], правая часть выражения (34) представляет собой разложение в ряд по присоединенным функциям Лежандра левой части выражения (33). Такое разложение представляется в виде [19]:

$$f(r; \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} P_{n+1}^1(\cos \theta), \quad (35)$$

где для коэффициентов разложения имеем

$$a_{n+1} = C_{n+1}^{(p)} (n+2)(n+1)r^n + D_{n+1}^{(p)} (n+1)(n+2)r^{-n-3}. \quad (36)$$

Из [19] известно, что любую регулярную функцию, определённую в интервале $(0, \pi)$, можно разложить в ряд по присоединённым функциям Лежандра:

$$F(r; \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} P_{n+1}^1(\cos \theta). \quad (37)$$

Так как функция, записанная в виде выражения, стоящего в левой части формулы (33), на основании (4) определена в интервале $(0, \pi)$, кроме точек, расположенных на контуре витка с током, разложим её в ряд (37). Согласно [19] коэффициенты разложения этой функции имеют вид

$$A_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{2(n+1)(n+2)} \int_0^\pi F(\theta) P_{n+1}^1(\cos\theta) \sin\theta d\theta. \quad (38)$$

Заменяя переменную $x = \cos\theta$ в выражениях (33), (38), немой индекс n на s в выражении (33) и подставляя правую часть выражения (33) вместо $F(r; \theta)$ в формулу (38), получаем

$$A_{n+1} = -\frac{(1+2(n+1))\mu_p I a^2}{2(n+2)(n+1)(r^2+a^2)^{2,5}} \sum_{s=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{2s} \frac{0,5+i}{1+i} \prod_{j=1}^{s+1} \frac{2j-1}{2j} \left(\frac{2ar_{p,p+1}}{r_{p,p+1}^2+a^2} \right)^{2s} \left[2a^2(s+1)(1+2s) - \right. \\ \left. - r^2(2s+1)(3+2s) + \frac{2r^4(2s+1)(2s+2,5) - 4a^2r^2(s+1)(2s+2,5)}{r^2+a^2} \right] \int_{-1}^1 (1-x^2)^{s+0,5} P_{n+1}^1(x) dx. \quad (39)$$

Замена в подынтегральной части выражения (39) $\mu = 1$, $\gamma = n+1$, $\lambda = s+1,5$ приводит этот интеграл к известному определённый интегралу [20]:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-1} P_{\gamma}^{\mu}(x) dx = \frac{\pi 2^{\mu} \Gamma(\lambda + \frac{\mu}{2}) \Gamma(\lambda - \frac{\mu}{2})}{\Gamma(\lambda + \frac{\gamma}{2} + 1) \Gamma(\lambda - \frac{\gamma}{2}) \Gamma(1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\gamma}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} - \frac{\gamma}{2})}, \quad (40)$$

где λ , μ , γ — комплексные параметры, причём $2\operatorname{Re}\lambda > |\operatorname{Re}\mu|$, что справедливо для решаемой задачи; $\Gamma(s)$ — гамма функция.

Согласно (40), определённый интеграл, присутствующий в (39), преобразуется к виду

$$L = \frac{2\pi \Gamma(s+2) \Gamma(s+1)}{\Gamma(s + \frac{n}{2} + 3) \Gamma(s+1 - \frac{n}{2}) \Gamma(1 + \frac{n}{2}) \Gamma(-\frac{n+1}{2})}. \quad (41)$$

Таким образом, если учесть выражения (35), (37), то левая и правая части формулы (32) являются разложением в ряд по присоединённым функциям Лежандра. Эти ряды будут равны в том случае, если соответствующие члены правого ряда будут равны членам левого ряда выражения (32). Применяя метод сравнения рядов и учитывая, что члены ряда (35) отличаются от членов ряда (37) только коэффициентами разложения, можно заключить, что ряд (35) будет равен ряду (37) в том случае, если соответствующие коэффициенты разложения (36) будут равны коэффициентам разложения (38). Условие равенства рядов имеет вид

$$a_{n+1} = A_{n+1}, \quad (42)$$

где $n = 0, 1, \dots, \infty$.

Поскольку для рассматриваемой модели геометрия электромагнитной системы, кроме осевой симметрии, приобретает ещё и симметрию относительно плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$, и $P_{n+1}^1(\cos\theta) = 0$, где n — нечётное число, то в приведённых выше выражениях (34)–(39), (41) для магнитного поля необходимо заменить индекс $n+1$ на $2n+1$ [20], оставив при этом индекс суммирования рядов без изменения. Приравнявая коэффициенты разложения согласно выражению (42) для всех членов ряда выражения (32), получим бесконечное число уравнений, содержащих только одно неизвестное r . Одинаковые корни для всех этих уравнений будут являться решением второго уравнения системы (25) и координатами точек, в которых вектор индукции магнитного поля имеет экстремальные значения.

Полученное аналитическое выражение в виде бесконечного числа уравнений с одним неизвестным может найти применение при автоматизированном проектировании аналогичных электромагнитных систем (в том числе, шаровых электродвигателей), так как позволяет с небольшими затратами времени на ЭВМ с высокой точностью определить координаты экстремумов вектора индукции магнитного поля в каждой из сред электромагнитной системы, если катушка обмотки представлена в виде системы софокусно расположенных в экваториальной плоскости круговых, бесконечно тонких витков с током, а также, если электромагнитная система

представлена такими катушками, повёрнутыми друг относительно друга на некоторый угол. Зная координаты точек экстремумов, по приведённой математической модели магнитного поля, можно определить в них значения индукции магнитного поля в каждой из сред электромагнитной системы, что, в свою очередь, позволит спроектировать электромагнитную систему, экстремальные значения индукции которой находятся в заданных пределах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дементьев, В.М. Вращательно-симметричное магнитное поле статического контурного тока в «сферическом» многосредном пространстве [Текст] / В.М. Дементьев, А.И. Скороспешкин / Электрические машины. Машинно-вентильные системы, коммутация коллекторных электрических машин: Межвузов. сб. научн. тр. — Куйбышев: КПИИ, 1978. — Вып. 4. — С. 65–72.
2. Фомин, А.А. Шар в поле витка с током [Текст] / А.А. Фомин // ЖТФ. — 1963. — Т. 33, Вып. 9. — С. 1021–1030.
3. Абламунец, И.Г. Вращающийся шар в поле витка с током [Текст] / И.Г. Абламунец, О.П. Прудников // ЖТФ. — 1990. — Т. 60, Вып. 6. — С. 1–12.
4. Гримальский, О.В. Метод расчёта трёхмерного электромагнитного поля тонких пластин и оболочек [Текст] / О.В. Гримальский // Извест. АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1990. — № 6. — С. 61–68.
5. Апполонский, С.М. Расчёт неоднородной экранирующей сферической оболочки [Текст] / С.М. Апполонский // Изв. вузов. Электромеханика. — 1986. — № 10. — С. 110–113.
6. Петленко, Б.И. Оптимизация комбинированного электромагнитного экрана по массе [Текст] / Б.И. Петленко, А.Е. Дергачев // Электричество. — 1990. — № 11. — С. 62–65.
7. Лавров, В.Я. Применение принципа Гюгенса—Кирхгофа для идентификации электромагнитного поля в сферических координатах. [Текст] / В.Я. Лавров, А.В. Кирпанев, А.П. Пуханов // Техническая электродинамика. — 1990. — № 6. — С. 18–22.
8. Замидра, А.И. Расчёт осесимметричного магнитного поля в системах со сферическим экраном [Текст] / А.И. Замидра, А.И. Трохименко // Техническая электродинамика. — 1984. — № 4. — С. 21–26.
9. Граве, В.И. Намагничивание шарового ферромагнитного слоя и сплошного ферромагнитного шара в магнитном поле кругового контура с током [Текст] / В.И. Граве // Теоретическая электротехника (Львов) — 1987. — № 43. — С. 13–16.
10. Ивлиев, Е.А. О синтезе магнитных полей в слоистых средах [Текст] / Е.А. Ивлиев, Ю.Я. Иосиль, Л.А. Цейтлин // Электричество. — 1989. — № 2. — С. 88–89.
11. Калимов, А.Г. Применение интегро-дифференциального уравнения магнитостатики для расчёта тонкостенных ферромагнитных экранов [Текст] / А.Г. Калимов // Электричество. — 1999. — № 11. — С. 36–38.
12. Одилов, Г. Представление решения краевой задачи для уравнения электромагнитного поля электрической машины в свёрнутой форме [Текст] / Г.Одилов, Э.Хакимов // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук. — 1985. — № 5. — С. 16–21.
13. Петров, С.И. Электромагнитное поле в сферической полости с вращающимся шаром [Текст] / С.И. Петров // Изв. вузов. Электромеханика. — 1991. — № 3. — С. 20–26.
14. Лютахин, Ю.И. Алгоритм определения максимумов индукции магнитного поля электромагнитной системы шарового электродвигателя [Текст] / Ю.И. Лютахин, В.М. Дементьев / Специальные электрические машины: Межвузов. сб. научных тр. — Куйбышев: КПИИ, 1983. — С. 36–40.
15. Лютахин, Ю.И. Оптимальное проектирование электромагнитной системы шарового электродвигателя [Текст] / Ю.И. Лютахин / Электрические машины специального назначения: Межвузов. сб. научных тр. — Куйбышев: КПИИ, 1985. — С. 12–19.
16. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1984. — 809 с.
17. Тамм, И.Е. Основы теории электричества [Текст] / И.Е. Тамм. — М.: Наука, 1976. — 616 с.
18. Штафль, М. Электродинамические задачи в электрических машинах и трансформаторах [Текст] / М. Штафль. — М.-Л.: Энергия, 1966. — 200 с.
19. Шимони, К. Теоретическая электротехника [Текст] / К. Шимони. — М.: Мир, 1964. — 773 с.
20. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений. [Текст] / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М.: Наука, 1971. — 638 с.