Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Репин, Нелокальная задача А. М. Нахушева для уравнения смешанного типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 5–9

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu54>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:50:37

Дифференциальные уравнения

УДК. 517. 956

О.А. Репин

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА А.М.НАХУШЕВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Для модельного уравнения смешанного типа поставлена и исследована краевая задача со смещением, причем областью эллиптичности уравнения является полубесконечная полоса. В области гиперболичности уравнения задается условие, связывающее с помощью дробных производных значение искомого решения в трех точках, две из которых лежат на граничных характеристиках из разных семейств, а третья - на линии вырождения уравнения. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

1 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$G_m \mathbf{u} \equiv \text{sign} y |y|^m \mathbf{u}_{xx} + \mathbf{u}_{yy} = 0, \quad m > 0 \quad (1)$$

в бесконечной области Ω , ограниченной полупрямыми $x=0$, $x=1$, расположенными в полуплоскости $y>0$, и характеристиками

$$AC: x = x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: h = x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$.

Введем обозначения: Ω_1 и Ω_2 - соответственно эллиптическая и гиперболическая части смешанной области Ω ; $A_h = A_h(0, h)$, $B_h = B_h(0, h)$, $h>0$; Ω_{1h} - открытый прямоугольник с вершинами A , A_h , B_h , B ; $\Omega_h = \Omega_{1h} \cup AB \cup \Omega_2$; $\theta_0(x)$ и $q_1(x)$ - абсциссы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0)$, с характеристиками AC и BC соответственно; I - единичный интервал $0<x<1$ прямой $y=0$; $(D_{0+}^\alpha \varphi)(x)$, $(D_{1-}^\alpha \varphi)(x)$ - операторы дробного интегрирования в смысле Римана - Лиувилля [1], [2].

Задача 1. Найти функцию $\mathbf{u}(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) $G_m \mathbf{u} \equiv 0$ в $\Omega_1 \cup \Omega_2$;
- 2) $\mathbf{u}(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega} \setminus \overline{AB}) \cap C^2(\Omega \setminus AB)$;
- 3) $\lim_{y \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(x, y) = 0$ равномерно по $x \in \bar{I}$;
- 4) существуют конечные и равные между собой пределы

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \mathbf{u}_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-0} \mathbf{u}_y(x, y) \quad (x \in I);$$

- 5) $\mathbf{u}(0, y) = j_1(y)$, $\mathbf{u}(1, y) = j_2(y)$ $0 \leq y < \infty$;

$$6) a(x) (D_{0+}^{1-\beta} \mathbf{u}[\theta_0(t)])(x) + b(x) (D_{1-}^{1-\beta} (\mathbf{u}[\theta_1(t)]))(x) = C(x) - x^\beta b(x) (D_{1-}^{1-\beta} \mathbf{u}(t, 0))(x) \quad \forall x \in I,$$

где $j_1(y)$, $j_2(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $C(x)$, - заданные функции, такие, что

$$j_1(y), j_2(y) \in C[0, +\infty), \quad y^{\frac{3m}{4}} j_1(y), y^{\frac{3m}{4}} j_2(y) \in L[0, +\infty),$$

$$a(x), b(x), C(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I), \quad (2)$$

$$(1-x)^b a(x) + x^b b(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{I}, \quad (3)$$

$$b = \frac{m}{2(m+2)}.$$

Отметим, что впервые краевое условие вида б) для уравнения (1) появилось в работе А.М.Нахушева [3, с.737] и задачи такого типа вошли в математическую литературу под названием краевых задач со смещением.

В монографии [4, с.143] А.М.Нахушев выписал нелокальное внутреннекраевое условие для уравнения $G_m u = 0$, из которого условие б) следует как частный случай.

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [3], [5-7].

2 Единственность решения задачи 1.

Пусть, как обычно,

$$t(x) = u(x, 0), \quad x \in \bar{I},$$

$$n(x) = \lim_{y \rightarrow 0-0} u_y(x, y), \quad x \in I.$$

Фундаментальное соотношение между $t(x)$ и $n(x)$, принесенное на I из гиперболической Ω_2 части смешанной области, имеет вид [3] (см. также, [5, с.80], [7, с.211]):

$$\gamma_2 \Gamma(1-\beta) [(1-x)^\beta \alpha(x) + x^\beta b(x)] v(x) = \gamma_1 \Gamma(\beta) (1-x)^\beta \alpha(x) (D_{0+}^{1-2\beta} \tau)(x) - x^\beta (1-x)^\beta C(x), \quad (4)$$

где

$$g_1 = \frac{\Gamma(2b)}{\Gamma^2(b)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2b} \frac{\Gamma(1-2b)}{\Gamma^2(1-b)}.$$

Из (4) непосредственно вытекают следующие утверждения

Л е м м а 1. Если $C(x) \equiv t(x) = 0$ на $[0, 1]$, то $n(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$.

Л е м м а 2. Пусть $\max_I t(x) = t(x_0) > 0$ ($\min_I t(x) = t(x_0) < 0$), $x_0 \in I$, $a(x) b(x) > 0$, $C(x) \equiv 0$ на отрезке $\bar{I}$. Тогда $n(x_0) > 0$ ($n(x_0) < 0$).

Доказательство леммы следует из (4) и принципа максимума для производных дробного порядка [10].

Т е о р е м а 1. Решение задачи 1 единственно в классе функций

$$u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega} \setminus \overline{AB}) \cap C^2(\Omega \setminus AB),$$

если $a(x), b(x), C(x) \in C(\bar{I})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(x, y)$ - решение однородной задачи 1 и, в частности,

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad y \geq 0. \quad (5)$$

Покажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в области Ω_1 . Предположим противное. Тогда найдется такая область $\Omega_{1h} (h > 0)$ в которой $u(x, y) \neq 0$, и, следовательно, $\max_{D_{1h}} |u| > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\max_{\Omega_{1h}} |u| = \max_{\Omega_{1h}} u > 0$. Убедимся, что $\max_{\Omega_{1h}} u$ достигается на $\overline{A_h B_h}$.

Допустим, что это не так. Тогда ввиду (5) он должен достигаться в некоторой внутренней точке $(x_0, 0)$ отрезка AB . Но тогда по лемме типа леммы К.И. Бабенко [9, 11] должно выполняться $u_y(x_0, 0+0) = n(x_0) < 0$, что противоречит лемме 2. Следовательно, $\max_{\Omega_{1h}} u$ должен достигаться на $\overline{A_h B_h}$.

Точно также можно убедиться, что $\max_{\Omega_{1h}^*} u = \max_{A_{h^*} B_{h^*}} |u|$ при любом $h^* > h$.

Так как $\overline{\Omega}_{1_h} \subset \overline{\Omega}_{1_h^*}$, имеем $\max_{\Omega_{1_h^*}} |u| \geq \max_{\Omega_{1_h}} |u| > 0$. Отсюда $\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) \neq 0$, что противоречит условию 3) задачи 1. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_1$; в частности, $u(x, 0) = t(x) \equiv 0$ на $\overline{AB}$. Но тогда $u(x, y) \equiv 0$ в области $\overline{\Omega}_2$ на основании леммы 1.

Таким образом, $u(x, y) \equiv 0$ в области Ω . Тем самым теорема 1 доказана.

3 Существование решения задачи 1.

Переходя к доказательству существования решения задачи 1, будем дополнительно предполагать, что

$$\begin{aligned} a(x) &= x\mu_1(x), b(x) = x^\beta(1-x)\mu_2(x), C(x) = x^\beta\mu_3(x), \\ \mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x), C(x) &\in {}^{(2,\alpha)}(\overline{I}), \\ \mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x) &\neq 0 \quad \forall x \in \overline{I}. \end{aligned} \quad (6)$$

Фундаментальное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное на I из эллиптической Ω_1 части смешанной области Ω имеет вид [6] (см. также [8, с. 1125])

$$\tau(x) = -\gamma_3 \int_0^1 v(t) G(x, t) dt + \tau_1(x), \quad (7)$$

где

$$\gamma_3 = \frac{(2-4\beta)^{2\beta} \Gamma^2(\beta)}{4\pi\Gamma(2\beta)};$$

$$\begin{aligned} G(x, t) &= |x-t|^{-2\beta} - (x+t)^{-2\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2n-x+t)^{-2\beta} + (2n+x+t)^{-2\beta} - (2n-x-t)^{-2\beta} - \right. \\ &\quad \left. - (2n+x-t)^{-2\beta} \right]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= 2 \left[\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right) (m+2)^{\frac{m+1}{m+2}} \right]^{-1} \left\{ \int_0^{\infty} t^{\frac{2m+1}{2}} \varphi_1(t) dt \int_0^{\infty} \frac{sh\lambda(1-x)}{sh\lambda} (\lambda)^{\frac{m+1}{m+2}} I_{-\frac{1}{m+2}} \left(\frac{2\lambda}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}} \right) d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} t^{\frac{2m+1}{2}} \varphi_2(t) dt \int_0^{\infty} \frac{sh\lambda x}{sh\lambda} (\lambda)^{\frac{m+1}{m+2}} I_{-\frac{1}{m+2}} \left(\frac{2\lambda}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}} \right) d\lambda \right\}; \end{aligned} \quad (9)$$

$I_n(z)$ - функция Бесселя первого рода [1, с.32]. Нетрудно видеть, что функция $t_1(x)$ имеет производные любого порядка в интервале $(0, 1)$. Производная $t_1'(x)$ при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 1$ остается ограниченной, что непосредственно следует из известной формулы

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{chI(1-x)}{shI} I^{2-2b} I_{b-\frac{1}{2}} \left((1-2b)t^{\frac{1}{1-2b}} I \right) dI &= 2p^{2-2b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{2-2b} \times \\ &\times \cos pn(1-x) K_{b-\frac{1}{2}} \left(pn(1-2b)t^{\frac{1}{1-2b}} \right), \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

На основании условия "склеивания" 4), исключая из (4) и (7) функцию $t(x)$, получим

$$\gamma_2 \Gamma(1-\beta) \left[(1-x)^\beta a(x) + x^\beta b(x) \right] v(x) + \gamma_1 \gamma_3 \Gamma(\beta) (1-x)^\beta a(x) D_{0+}^{1-2\beta} \left(\int_0^1 v(t) G(t, x) dt \right) (x) = g(x), \quad (10)$$

где

$$g(x) = \gamma_1 \Gamma(\beta) (1-x)^\beta a(x) (D_{0+}^{1-2\beta} \tau_1)(x) - x^\beta (1-x)^\beta C(x). \quad (11)$$

Учитывая вид функции $G(x, t)$ из (8), выпишем равенства, которые нам потребуются в дальнейшем [9, 12]:

$$I_1(x) = D_{0+}^{1-2\beta} \left(\int_0^1 v(t) |x-t|^{-2\beta} dt \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \left[\pi t g \pi \beta v(x) + \int_0^1 \left(\frac{t}{x} \right)^{1-2\beta} \frac{v(t) dt}{t-x} \right];$$

$$\begin{aligned}
I_2(x) &= D_{0+}^{1-2b} \left(\int_0^1 n(t) (x+t)^{-2b} dt \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(2b)} \int_0^1 \left(\frac{t}{x} \right)^{1-2b} \frac{n(t) dt}{t+x}; \\
I_3(x) &= D_{0+}^{1-2b} \left(\int_0^1 n(t) (2n-x+t)^{-2b} dt \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(2b)} \int_0^1 \left(\frac{2n-t}{x} \right)^{1-2b} \frac{n(t) dt}{2n-x+t}; \\
I_4(x) &= D_{0+}^{1-2b} \left(\int_0^1 n(t) (2n+x-t)^{-2b} dt \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(2b)} \int_0^1 \left(\frac{2n+t}{x} \right)^{1-2b} \frac{n(t) dt}{2n+x-t}; \\
I_5(x) &= D_{0+}^{1-2b} \left(\int_0^1 n(t) (2n-x-t)^{-2b} dt \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(2b)} \int_0^1 \left(\frac{2n-t}{x} \right)^{1-2b} \frac{n(t) dt}{2n-x-t}; \\
I_6(x) &= D_{0+}^{1-2b} \left(\int_0^1 n(t) (2n+x+t)^{-2b} dt \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(2b)} \int_0^1 \left(\frac{2n+t}{x} \right)^{1-2b} \frac{n(t) dt}{2n+x+t}.
\end{aligned}$$

Используя явный вид интегралов $I_i(x)$, $i = \overline{1,6}$, приведем (10) к сингулярному интегральному уравнению

$$[a_1(x) + b_1(x) + p t g p b a_1(x) \kappa_1] n(x) + \kappa_1 a_1(x) \int_0^1 n(t) K(x, t) dt = \frac{1}{g_2 \Gamma(1-b)} g(x), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
a_1(x) &= (1-x)^\beta a(x), \quad b_1(x) = x^\beta b(x), \\
\kappa_1 &= \frac{g_1 g_3 \Gamma(b)}{g_2 \Gamma(1-b) \Gamma(2b)}, \\
K(x, t) &= \left(\frac{t}{x} \right)^{1-2b} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-t}{x} \right)^{1-2b} \left(\frac{1}{2n-t+x} - \frac{1}{2n-t-x} \right) - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+t}{x} \right)^{1-2b} \left(\frac{1}{2n+t+x} - \frac{1}{2n+t-x} \right).
\end{aligned} \quad (13)$$

Перепишем функцию $K(x, t)$ в виде

$$K(x, t) = \left(\frac{t}{x} \right)^{1-2b} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt} + R(x, t) \right),$$

где

$$\begin{aligned}
R(x, t) &= \frac{1}{t+x-2xt} - \frac{1}{t-x} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-t}{t} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{2n-t+x} - \frac{1}{2n-t-x} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+t}{t} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{2n+t+x} - \frac{1}{2n+t-x} \right)
\end{aligned}$$

Заметим, что ряд в выражении для $R(x, t)$ сходится равномерно в квадрате $0 \leq x, t \leq 1$, исключая прямую $t=0$, причем в окрестности $t=0$ функция $R(x, t)$ представима в виде

$$R(x, t) = x t^{2b-1} Q(x, t),$$

где $Q(x, t)$ - непрерывная и ограниченная в замкнутом единичном квадрате функция.

На основании (11) справедлива следующая запись:

$$g(x) = g_1 \Gamma(b) (1-x)^b a(x) \frac{1}{\Gamma(2b)} \frac{d}{dx} \int_0^x t_1(t) (x-t)^{2b-1} dt - x^b (1-x)^b C(x).$$

Интегрируя по частям в интеграле, а затем дифференцируя по переменной x , находим

$$g(x) = \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} (1-x)^\beta a(x) \left[\tau_1(0) x^{2\beta-1} + \int_0^x \tau_1'(t) (x-t)^{2\beta-1} dt \right] - x^\beta (1-x)^\beta C(x) \quad (14)$$

Поскольку

$a(x) = x m_1(x)$, $c(x) = x^b m_3(x)$, то функция $g(x)$ в (14) принимает следующий вид:

$$g(x) = \frac{g_1 \Gamma(b)}{\Gamma(2b)} m_1(x) (1-x)^b x^{2b} \left[t_1(0) + \int_0^1 t_1'(xz) (1-z)^{2b-1} dz \right] - (1-x)^b x^{2b} m_3(x).$$

Полагая

$$x^{-2b} n(x) = r(x), \quad F(x) = \frac{1}{g_2 \Gamma(1-b)} x^{-2b} g(x), \quad R_1(x, t) = \frac{t}{x} R(x, t)$$

и учитывая тождество

$$\frac{t}{x} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt} \right) = \frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2xt}$$

приведем уравнение (12) к виду

$$\begin{aligned} & [a_1(x) + b_1(x) + \pi t g \pi \beta a_1(x) k_1] \rho(x) + \\ & + k_1 a_1(x) \int_0^1 \rho(t) \left[\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2xt} \right] dt + k_1 a_1(x) \int_0^1 \rho(t) R_1(x, t) dt = F(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя обычную методику [9, 12], уравнение (15) можно привести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого будет следовать из единственности решения задачи 1. Зная $n(x)$, определим функцию $u(x, y)$ соответственно в областях Ω_1 и Ω_2 .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 668 с.
2. Нахушев А.М. К теории дробного исчисления // Дифференц. уравнения. 1988. т. 24. №2. С. 313 - 324.
3. Нахушев А.М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // ДАН СССР. 1969. Т. 187. №4. С. 736 - 739.
4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк. 1995. 301 с.
5. Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения $\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12. №1. С. 79 - 88.
6. Репин О.А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой - полуполоса // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. №4. С. 565 - 567.
7. Лернер М.Е., Репин О.А. Существенно нелокальная краевая задача для уравнения с частными производными // Матем. заметки. 2000. Т.67. Вып. 3. С. 478 - 480.
8. Хачев М.М. Задача Дирихле для уравнения Геллерстедта в бесконечной прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 1999. Т.35. №8. С.1122-1126.
9. Лернер М.Е., Репин О.А. Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // Сибирск. матем. журнал. 1999. Т.40. №6. С. 1260 - 1275.
10. Нахушев А.М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференц. уравнения. 1974. Т.10. N 1. С. 100 - 111.
11. Бабенко К.И. К проблеме уравнений смешанного типа. Дисс. ... д.ф.-м. н. Москва. 1951.
12. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высш. шк. 1985. 304 с.