Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Прохоров, И. М. Куликовских, Частотные характеристики ортогональных функций Сонина–Лагерра, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 123–127

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:58:22

УДК 681.518.3

С. А. Прохоров, И. М. Куликовских

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ СОНИНА—ЛАГЕРРА

Проведён анализ частотных свойств ортогональных функций в базисе Сонина—Лагерра при изменении параметров ортогонального базиса. Определены основные соотношения, используемые при построении аналитических моделей корреляционной функции и спектральной плотности мощности.

Один из эффективных способов решения задачи корреляционно-спектрального анализа сводится к построению их ортогональных моделей в том или ином базисе [1].

Наличие широкого ассортимента хорошо изученных ортогональных базисов из числа классических, обладающих большим диапазоном разнообразных свойств и особенностей, обеспечивает возможность создания эффективных алгоритмов аналитической аппроксимации с высокой степенью адаптации к каждому сигналу [2].

В настоящее время наиболее хорошо изучены ортогональные базисы экспоненциального типа, имеющие единичную весовую функцию [1, 2], такие как Лагерра, Лежандра, Дирихле, Якоби. Другим ортогональным базисам с весовыми функциями отличными от единицы уделяется значительно меньше внимания, в частности ортогональному базису Сонина—Лагерра с варьируемым параметром α .

В общем случае ортогональные функции имеют следующее аналитическое выражение:

$$L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) = \frac{1}{C_{k+\alpha}^k} \sum_{s=0}^k C_{k+\alpha}^{k-s} \frac{(-\gamma\tau)^s}{s!} \exp\left(-\frac{\gamma\tau}{2}\right), \quad (1)$$

значение функций в «нуле» которых $L_k^{(\alpha)}(0, \gamma) = 1$, а норма имеет вид

$$\|L_k^{(\alpha)}\|^2 = \int_0^\infty L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) L_m^{(\alpha)}(\tau, \gamma) \mu^{(\alpha)}(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{C_{k+\alpha}^k \gamma^{\alpha+1}}, & k=m; \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad (2)$$

где $\mu^{(\alpha)}(\tau) = \tau^\alpha$ — вес ортогональной функции.

Аналитические выражения и свойства ортогональных функций Сонина—Лагерра $L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma)$ при $\alpha = 0, 1, 2$ представлены в табл. 1.

Таблица 1

Ортогональные функции Сонина—Лагерра и их свойства

α	$L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma)$	$\ L_k^{(\alpha)}\ ^2$	$L_k^{(\alpha)*}(0, \gamma)$	$\mu^{(\alpha)}(\tau)$
0	$L_k^{(0)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^{k-s} \frac{(-\gamma\tau)^s}{s!} \exp\left(-\frac{\gamma\tau}{2}\right)$	$\frac{1}{\gamma}$	1	1
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma) = \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma\tau)^s}{s!} \exp\left(-\frac{\gamma\tau}{2}\right)$	$\frac{1}{\gamma^2(k+1)}$	1	τ
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma) = \frac{2}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma\tau)^s}{s!} \exp\left(-\frac{\gamma\tau}{2}\right)$	$\frac{4}{\gamma^3(k+1)(k+2)}$	1	τ^2

Определим преобразование Фурье ортогонального фильтра Сонина—Лагерра в виде

$$W_k^{*(\alpha)}(j\omega) = \frac{1}{\|L_k^{(\alpha)}\|^2} \int_0^\infty L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) \mu^{(\alpha)}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (3)$$

Проведя последовательность преобразований, выражение (3) можно привести к виду

$$W_k^{*(\alpha)}(j\omega) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\|L_k^{(\alpha)}\|^2 (j\omega + \frac{\gamma}{2})^{\alpha+1}} \left(\frac{j\omega - \frac{\gamma}{2}}{j\omega + \frac{\gamma}{2}} \right)^k. \quad (4)$$

Выражение (4) имеет альтернативную форму представления, получаемую введением в данном выражении замены

$$\phi = \arctg \frac{2\omega}{\gamma}, \quad (5)$$

и имеет вид

$$W_k^{*(\alpha)}(j\omega) = \frac{(-1)^k 2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{\|L_k^{(\alpha)}\|^2 \gamma^{\alpha+1}} \cos^{\alpha+1} \phi \exp\left[-(2k+(\alpha+1))j\phi\right]. \quad (6)$$

Определим действительную и мнимую части (6):

$$\operatorname{Re} W_k^{*(\alpha)}(j\omega) = \frac{(-1)^k 2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{\|L_k^{(\alpha)}\|^2 \gamma^{\alpha+1}} \cos^{\alpha+1} \phi \cos[(2k+(\alpha+1))\phi]; \quad (7)$$

$$\operatorname{Im} W_k^{*(\alpha)}(j\omega) = -\frac{(-1)^k 2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{\|L_k^{(\alpha)}\|^2 \gamma^{\alpha+1}} \cos^{\alpha+1} \phi \sin[(2k+(\alpha+1))\phi]. \quad (8)$$

Выражения для действительной и мнимой части преобразования Фурье ортогонального фильтра для выбранных значений параметра α представлены в табл. 2.

Таблица 2

Преобразование Фурье ортогонального фильтра Сонина–Лагерра

α	$\operatorname{Re} W_k^{*(\alpha)}(j\omega)$	$\operatorname{Im} W_k^{*(\alpha)}(j\omega)$
0	$(-1)^k 2 \cos \phi \cos[(2k+1)\phi]$	$(-1)^{k+1} 2 \cos \phi \sin[(2k+1)\phi]$
1	$(-1)^k 4(k+1) \cos^2 \phi \cos[(2k+2)\phi]$	$(-1)^{k+1} 4(k+1) \cos^2 \phi \sin[(2k+2)\phi]$
2	$(-1)^k 4(k+1)(k+2) \cos^3 \phi \cos[(2k+3)\phi]$	$(-1)^{k+1} 4(k+1)(k+2) \cos^3 \phi \sin[(2k+3)\phi]$

Преобразование Фурье ортогонального фильтра часто используют при построении аналитических моделей корреляционных функций (КФ), которое позволяет получить простые аналитические выражения для расчёта коэффициентов разложения конкретных моделей КФ [1, 3]. В общем случае коэффициенты разложения КФ имеют вид

$$\beta_k = \frac{1}{\|L_k^{(\alpha)}\|^2} \int_0^\infty \rho_x(\tau) L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) \mu^{(\alpha)}(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Представим нормированную КФ (НКФ) $\rho_{x,5}(\tau) = \exp(-\lambda|\tau|) \cos \omega_0 \tau$ с использованием преобразования Эйлера в виде

$$\rho_{x,5}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\exp\left[-(\lambda - j\omega_0)\tau\right] + \exp\left[-(\lambda + j\omega_0)\tau\right] \right). \quad (10)$$

Подставив (10) в выражение (9), получим

$$\beta_{k,5} = \frac{1}{2\|L_k^{(\alpha)}\|^2} \int_0^\infty L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) \left[\exp\left[-(\lambda - j\omega_0)\tau\right] + \exp\left[-(\lambda + j\omega_0)\tau\right] \right] \mu^{(\alpha)}(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Далее, воспользовавшись методикой, описанной в [3], и вводя обозначения $\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{\omega_0}{\lambda + \frac{\gamma}{2}}$, $\phi_1 = \arctg \frac{\omega_0}{\lambda + \frac{\gamma}{2}}$, $A_1 = \frac{1}{\lambda + \frac{\gamma}{2}}$; $\operatorname{tg} \phi_2 = \frac{\omega_0}{\lambda - \frac{\gamma}{2}}$, $\phi_2 = \arctg \frac{\omega_0}{\lambda - \frac{\gamma}{2}}$, $A_2 = \frac{1}{\lambda - \frac{\gamma}{2}}$, получим результирующее выражение в виде

$$\beta_{k,5} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\|L_k^{(\alpha)}\|^2} A_1^{\alpha+1} B^k \cos^{\alpha+1} \phi_1 \cos[(\phi_2 - \phi_1)k - (\alpha+1)\phi_1], \quad (12)$$

где $B = \frac{A_1 \cos \phi_1}{A_2 \cos \phi_2}$.

Выражения для расчёта коэффициентов разложения модели

$$\rho_{x,5}(\tau) = \exp(-\lambda|\tau|) \cos \omega_0 \tau$$

представлены в табл. 3.

Для определения коэффициентов разложения моделей

$$\rho_{x,6,7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$

достаточно определить величину

$$J = \frac{\lambda}{2j \cdot \|L_k^{(\alpha)}\|^2 \omega_0} \int_0^\infty L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) \left[\exp(-(\lambda - j\omega_0)\tau) - \exp(-(\lambda + j\omega_0)\tau) \right] \mu^{(\alpha)}(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Отсюда определяются коэффициенты разложения $\rho_{x,6,7}(\tau)$ как

$$\beta_{k,6,7} = \beta_{k,5} \pm J, \quad (14)$$

где

$$J = -\frac{\Gamma(\alpha+1)\lambda}{\|L_k^{(\alpha)}\|^2 \omega_0} A_1^{\alpha+1} B^k \cos^{\alpha+1} \phi_1 \sin \left[(\phi_2 - \phi_1)k - (\alpha+1)\phi_1 \right]. \quad (15)$$

Подставив (15) в формулу (14), получим окончательный результат (см. табл. 4):

$$\beta_{k,6,7} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\|L_k^{(\alpha)}\|^2} A_1^{\alpha+1} B^k \cos^{\alpha+1} \phi_1 \left[\cos \left[(\phi_2 - \phi_1)k - (\alpha+1)\phi_1 \right] \mp \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left[(\phi_2 - \phi_1)k - (\alpha+1)\phi_1 \right] \right]. \quad (16)$$

Таблица 4

Выражения для расчёта коэффициентов разложения $\rho_{x,6,7}(\tau)$	
α	$\beta_{k,6,7}$
0	$\beta_k = \gamma \cdot A_1 B^k \cos \phi_1 \left[\cos [k\phi_2 - (k+1)\phi_1] \mp \frac{\lambda}{\omega_0} \sin [k\phi_2 - (k+1)\phi_1] \right]$
1	$\beta_k = \gamma^2 (k+1) \cdot A_1^2 B^k \cos^2 \phi_1 \left[\cos [k\phi_2 - (k+2)\phi_1] \mp \frac{\lambda}{\omega_0} \sin [k\phi_2 - (k+2)\phi_1] \right]$
2	$\beta_k = \frac{\gamma^3 (k+1)(k+2)}{2} \cdot A_1^3 B^k \cos^3 \phi_1 \left[\cos [k\phi_2 - (k+3)\phi_1] \mp \frac{\lambda}{\omega_0} \sin [k\phi_2 - (k+3)\phi_1] \right]$

Полученные аналитические выражения для расчёта коэффициентов разложения позволяют существенно снизить временные затраты и повысить точность и порядок вычисляемых коэффициентов разложения при расчёте на ЭВМ.

Определив коэффициенты разложения β_k , для построения модели КФ необходимо решить задачу определения параметра масштаба γ , обеспечивающего минимальную допустимую погрешность аппроксимации. Для ортогональных функций Сонина—Лагерра при $\alpha = 0$ данная задача решена [4]. Одно из возможных решений, обеспечивающих допустимую погрешность аппроксимации и лучшую сходимость с наименьшими вычислительными затратами, связано с введением ограничения $\beta_0 = 1$. Данное уравнение для модели $\rho_{x,5}(\tau)$ примет вид

$$\frac{1}{\|L_0^{(\alpha)}\|^2} \int_0^\infty L_0^{(\alpha)}(\tau, \gamma) \exp(-\lambda\tau) \tau^\alpha \cos \omega_0 \tau d\tau = 1. \quad (17)$$

Проведя ряд преобразований, соотношение (17) можно записать следующим образом:

$$\frac{\alpha!}{2\|L_0^{(\alpha)}\|^2} \left[\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda + j\omega_0\right)^{\alpha+1}} + \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda - j\omega_0\right)^{\alpha+1}} \right] = 1. \quad (18)$$

При $\alpha = 0$ (18) принимает простой вид:

$$\frac{\gamma}{2} \left[\frac{\frac{\gamma}{2} + \lambda}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda\right)^2 + \omega_0^2} \right] = 1. \quad (19)$$

В результате проведения ряда преобразований и решения квадратного уравнения (19) с учётом того, что параметр масштаба $\gamma > 0$, получим

$$\gamma = 2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (20)$$

Заметим, что параметр масштаба γ , определённый по (20), находится вблизи оптимального значения $\gamma_{\text{опт}}$ и обеспечивает погрешности аппроксимации, близкие к минимальным [4]. В подтверждение изложенному ниже представлены графические зависимости относительной погрешности аппроксимации при заданном $m = 7$ от параметра масштаба γ для рассматриваемых значений α (см. рис. 1). Вертикальной штриховой прямой на рисунке указано найденное решение (20). Здесь в качестве КФ взята модель

$$\rho_{x,5}(\tau) = \exp(-|\tau|) \cos 5\tau. \quad (21)$$

Следует отметить, что с увеличением порядка погрешность вычисления коэффициентов разложения, полученных с помощью (12) и (16), уменьшается, что говорит о выполнении равенства Парсеваля [1].

Определим преобразование Фурье ортогональных функций Сонина—Лагерра в виде

$$W_k^{(\alpha)}(j\omega) = \int_0^\infty L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (22)$$

Подстановкой выражения (1) в формулу (22) получим результирующее выражение

$$W_k^{(\alpha)}(j\omega) = \frac{1}{C_{k+\alpha}^k} \sum_{s=0}^k C_{k+\alpha}^{k-s} (-\gamma)^s \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2} + j\omega\right)^{s+1}},$$

которое с учётом (5) можно представить в виде

$$W_k^{(\alpha)}(j\omega) = \frac{2 \cos \phi}{C_{k+\alpha}^k \gamma} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_{k+\alpha}^{k-s} \cos^s \phi \cdot \exp(-(s+1)j\phi).$$

Определим действительную и мнимую части полученного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W_k^{(\alpha)}(j\omega) &= \frac{2 \cos \phi}{C_{k+\alpha}^k \gamma} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_{k+\alpha}^{k-s} \cos^s \phi \cos[(s+1)\phi]; \\ \operatorname{Im} W_k^{(\alpha)}(j\omega) &= -\frac{2 \cos \phi}{C_{k+\alpha}^k \gamma} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_{k+\alpha}^{k-s} \cos^s \phi \sin[(s+1)\phi]. \end{aligned}$$

Выражения для действительной и мнимой части преобразования Фурье ортогональных функций для выбранных значений параметра α представлены в табл. 5.

Преобразование Фурье ортогональных функций Сонина—Лагерра может быть использовано при решении разнообразных задач, в том числе при определении длительности ортогональной функции, исходя из выражений

$$\tau_u^{(2)} = \int_0^\infty L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) d\tau = W_k^{(\alpha)}(0) = \frac{2}{C_{k+\alpha}^k \gamma} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_{k+\alpha}^{k-s} \quad \text{или} \quad \tau_u^{(4)} = \int_0^\infty \left(L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) \right)^2 d\tau.$$

Рис. 1. Зависимости относительной погрешности аппроксимации при $m = 7$ от параметра масштаба γ для различных значений α

Таблица 5

Преобразование Фурье ортогональных функций Сонина—Лагерра		
α	$\operatorname{Re} W_k^{(\alpha)}(j\omega)$	$\operatorname{Im} W_k^{(\alpha)}(j\omega)$
0	$\frac{2\cos\phi}{\gamma} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_k^{k-s} \cos^s \phi \cos[(s+1)\phi]$	$-\frac{2\cos\phi}{\gamma} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_k^{k-s} \cos^s \phi \sin[(s+1)\phi]$
1	$\frac{2\cos\phi}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_{k+1}^{k-s} \cos^s \phi \cos[(s+1)\phi]$	$-\frac{2\cos\phi}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_{k+1}^{k-s} \cos^s \phi \sin[(s+1)\phi]$
2	$\frac{4\cos\phi}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_{k+2}^{k-s} \cos^s \phi \cos[(s+1)\phi]$	$-\frac{4\cos\phi}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_{k+2}^{k-s} \cos^s \phi \sin[(s+1)\phi]$

При построении аналитической модели спектральной плотности мощности (СПМ) также используется преобразование Фурье ортогональных функций. Определив параметры модели КФ $\gamma, \beta_0, \dots, \beta_m$ в виде

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \left[\sum_{k=0}^m \beta_k L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) 1(\tau) + \sum_{k=0}^m \beta_k L_k^{(\alpha)}(-\tau, \gamma) 1(-\tau) \right],$$

оценим СПМ:

$$S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty K_a(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^m \beta_k (W_k^{(\alpha)}(j\omega) + W_k^{(\alpha)}(-j\omega)) \right] = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \operatorname{Re} W_k^{(\alpha)}(j\omega).$$

В табл. 6 приведены модели СПМ при выбранных значениях параметра α .

По полученным аналитическим выражениям проведён сравнительный анализ моделей СПМ при рассматриваемых значениях параметра α . В качестве модели КФ используется (21), параметр масштаба для которой определяется из выражения (20). Можно сделать вывод, что с увеличением α СПМ восстанавливается наиболее точно (см. рис. 2), т. е. при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ модели СПМ лучше описывают теоретическую кривую СПМ, однако для этого требуется большее число членов разложения. Так как современные ЭВМ позволяют строить ортогональные модели высоких порядков, данная проблема не препятствует использованию ортогонального базиса Сонина—Лагерра для решения задач аналитической аппроксимации, и, в частности, для построения моделей КФ и СПМ.

Таблица 6

Модели спектральной плотности мощности в базисе Сонина—Лагерра

α	$S_a(\omega)$
0	$\frac{2\sigma_x^2 \cos\phi}{\pi\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \sum_{s=0}^k (-2)^s C_k^{k-s} \cos^s \phi \cos[(s+1)\phi]$
1	$\frac{2\sigma_x^2 \cos\phi}{\pi\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_{k+1}^{k-s} \cos^s \phi \cos[(s+1)\phi]$
2	$\frac{4\sigma_x^2 \cos\phi}{\pi\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k (-2)^s C_{k+2}^{k-s} \cos^s \phi \cos[(s+1)\phi]$

Рис. 2. Модели СПМ в базисе Сонина—Лагерра: 1 — при $\alpha = 0$; 2 — при $\alpha = 1$; 3 — при $\alpha = 2$; 4 — теоретическая кривая

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Прикладной анализ случайных процессов [Текст] / Под ред. С. А. Прохорова. — Самара: СНЦ РАН, 2007. — 582 с.
2. Обобщённый спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. [Текст] / Ф. Ф. Дедус, С. А. Махортых, М. Н. Устинин и др. — М.: Машиностроение, 1999. — 357 с.
3. Прохоров, С. А. Частотные свойства ортогональных функций экспоненциального типа [Текст] / С. А. Прохоров / Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ-2006): Тр. научн.-техн. конф. с международ. участием. — Самара, 2006. — Т. 2. — С. 55–62.
4. Прохоров, С. А. Аппроксимативный анализ случайных процессов [Текст] / С. А. Прохоров; 2-е изд., перераб. и доп. — Самара: СНЦ РАН, 2003. — 286 с.