Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Астафьев, Г. Д. Федорченко, Моделирование фильтрации жидкости при наличии трещины гидравлического разрыва пласта, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 128–132

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 05:04:22

УДК 517.958:532.546

В. И. Астафьев, Г. Д. Федорченко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА ПЛАСТА

Исследуется процесс фильтрации жидкости к скважине при наличии трещины гидравлического разрыва пласта (ГРП). Данная трещина представляется в виде тонкого эллипса, пересекающего скважину. Использование аппарата ТФКП позволило найти точное решение данной задачи, получить аналитическое выражение для величины скин-фактора, отражающего влияние трещины ГРП на продуктивность скважины. В завершение представлена упрощённая постановка данной задачи, когда трещина ГРП представляется в виде разреза нулевой толщины, но конечной проводимости.

Введение. Гидравлический разрыв пласта (ГРП) представляет собой механический метод воздействия на продуктивный пласт, состоящий в том, что порода разрывается по плоскостям минимальной прочности под действием избыточного давления, создаваемого закачкой в скважину жидкости с расходом, который скважина не успевает поглощать. Флюиды, посредством которых с поверхности на забой скважины передаётся энергия, необходимая для разрыва, называются жидкостями разрыва. После разрыва под воздействием давления жидкости трещина увеличивается, возникает её связь с системой естественных трещин, не вскрытых скважиной, и с зонами повышенной проницаемости. Таким образом, расширяется область пласта, дренируемая скважиной. В образованную трещину жидкостями разрыва транспортируют зернистый материал (проппант), закрепляющий трещину в раскрытом состоянии после снятия избыточного давления.

В результате ГРП повышается дебит добывающих или приёмистость нагнетательных скважин за счёт снижения гидравлических сопротивлений в призабойной зоне и увеличения фильтрационной поверхности скважины, а также повышается конечная нефтеотдача за счёт приобщения к выработке слабодренируемых зон и пропластков.

Метод ГРП имеет множество технологических решений, обусловленных особенностями конкретного объекта обработки и достигаемой целью. Технологии ГРП различаются, прежде всего, по объемам закачки технологических жидкостей и проппантов и, соответственно, по размерам создаваемых трещин [1].

Проведение гидроразрыва с образованием протяжённых трещин приводит к увеличению не только проницаемости призабойной зоны, но и охвата пласта воздействием, вовлечением в разработку дополнительных запасов нефти и повышению нефтеизвлечения в целом.

В данной работе рассмотрена задача о фильтрации жидкости к скважине при наличии уже созданной трещины ГРП.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу стационарной фильтрации однородной жидкости, обусловленной стоком интенсивности Q , расположенным в центре конфокального эллипса с полуосями l , δ и фокусным расстоянием f ($f^2 = l^2 - \delta^2$).

Предполагается, что пласт имеет постоянную толщину h и проницаемость k_1 .

Эллипс ограничивает включение, моделирующее трещину гидроразрыва пласта (ГРП), которая характеризуется величиной проницаемости k_2 (рис. 1).

Пусть движение жидкости в пласте и трещине подчиняется линейному закону фильтрации Дарси [1,2]

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad} p. \quad (1)$$

Тогда из условия несжимаемости

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

распределение потенциала ϕ в области пласта и области трещины ГРП определяется уравнением Лапласа

$$\nabla \phi_i = 0, \quad \phi_i = \frac{k_i h p_i}{\mu}, \quad (3)$$

где p_i — давление; μ — вязкость жидкости; h — толщина пласта; индекс $i = 1$ соответствует внешней области (пласту), $i = 2$ соответствует трещине.

Перейдём к комплексному потенциалу $\Phi = \phi + i\psi$ комплексной переменной $z = x + iy = re^{i\alpha}$, где ψ — функция тока рассматриваемого течения. Тогда общее решение задачи (3) будет иметь вид [1]:

$$\Phi_1 = \frac{Q}{2\pi} \ln z + k_1 \sum_{n=0}^{+\infty} B_n z^{-2n}, \quad (4)$$

$$\Phi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln z + k_2 \sum_{n=0}^{+\infty} D_n z^{2n}. \quad (5)$$

В этих выражениях чётные степени z объясняются центральной симметрией течения, из осевой симметрии течения следует, что коэффициенты B_n и D_n являются вещественными.

Граница трещины в комплексной форме имеет вид [1]:

$$z_1 = \frac{f}{2} \left(\frac{e^{i\alpha}}{q} + \frac{q}{e^{i\alpha}} \right) = \frac{f}{2q} e^{i\alpha} (1 + q^2 e^{-2i\alpha}), \quad (6)$$

где $q = \sqrt{\frac{l-\delta}{l+\delta}}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

На линии раздела трещины и пласта давление p и функция тока ψ должны быть непрерывны, т.е. на границе (6) должны выполняться следующие граничные условия:

1) равенство давлений:

$$\frac{1}{k_1} \operatorname{Re} \Phi_1(z_1) = \frac{1}{k_2} \operatorname{Re} \Phi_2(z_1); \quad (7)$$

2) условие непрерывности линии тока:

$$\operatorname{Im} \Phi_1(z_1) = \operatorname{Im} \Phi_2(z_1). \quad (8)$$

2. Построение решения. Вдоль линии (6) справедливо следующее представление отрицательной степени комплексной переменной z :

$$z_1^{-2n} = \left(\frac{f}{2} \right)^{-2n} q^{2n} e^{-2in\alpha} (1 + q^2 e^{-2i\alpha})^{-2n} = \left(\frac{f}{2} \right)^{-2n} q^{2n} e^{-2in\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{2k} e^{-2ika} \right)^{2n}. \quad (9)$$

Следовательно, ряд по отрицательным степеням z_1 в выражении (4) может быть представлен в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n z_1^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (q e^{-i\alpha})^{2n}. \quad (10)$$

Ряд по положительным степеням z_1 в выражении (5) запишется следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n z_1^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{f}{2} \right)^{2n} \left(C_{2n}^n + \sum_{k=1}^n C_{2n}^{n-k} ((q e^{-i\alpha})^{2k} + (q e^{-i\alpha})^{-2k}) \right), \quad (11)$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Так как $|q^2 e^{-2i\alpha}| < 1$, то вдоль кривой (6) функцию $\ln z$ можно разложить как

$$\ln z_1 = \ln \frac{f}{2p} + i\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (q e^{-i\alpha})^{2n}. \quad (12)$$

Рис. 1. Пласт, пересеченный вертикальной трещиной гидроразрыва

Подставляя разложения (10)–(12) в уравнения (7)–(8) и приравнявая соответствующие коэффициенты, получим:

$$A_n = \frac{Q}{2\pi k_1} \frac{(-1)^n}{n} \frac{\lambda(1 - q^{4n})}{1 - \lambda q^{4n}}; \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{f}{2}\right)^{2n} C_{2n}^n = B_0 - D_0 + \frac{Q}{2\pi k_1} \frac{2\lambda}{1 + \lambda} \ln \frac{f}{2q}; \quad (14)$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} D_k \left(\frac{f}{2}\right)^{2k} C_{2k}^{k-n} = \frac{Q}{2\pi k_2} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{\lambda q^{4n}}{1 - \lambda q^{4n}}, \quad (15)$$

где $\lambda = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$.

Подстановка соотношений (13)–(15) в выражения (4) и (5) даёт следующее распределение комплексного потенциала в области пласта и области трещины ГРП:

$$\Phi_1 = k_1 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{f}{2} + (1 - \lambda) \ln \frac{2z}{f} - \lambda \ln v + (1 - \lambda) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \ln [1 + q^{4m} v^2] \right); \quad (16)$$

$$\Phi_1 = k_2 B_0 + \frac{Q}{2\pi} \left(\ln z + \frac{2\lambda}{1 - \lambda} \ln \frac{f}{2q} + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \ln \left[1 + q^{8m} + q^{4m} \left(\frac{4z^2}{f^2} - 2 \right) \right] \right),$$

где $v = e^{i\alpha}$.

Пусть $r_w \ll f$ – радиус скважины, $R_c \gg f$ – радиус удалённого контура питания, на котором задано постоянное давление p_c . Тогда при $z_w = r_w e^{i\alpha}$, где $|z_w| = r_w \ll f$, распределение (16) даёт следующее выражение для величины давления на скважине:

$$p_w = \frac{\mu}{h} B_0 + \frac{Q\mu}{2\pi k_2 h} \left[\ln r_w + \frac{2\lambda}{1 - \lambda} \ln \frac{f}{2q} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda q^{4n}}{n(1 - \lambda q^{4n})} \right]. \quad (17)$$

Учитывая, что давление на контуре питания $z_c = R_c e^{i\alpha}$ определяется выражением

$$p_c = \frac{\mu}{h} B_0 + \frac{Q\mu}{2\pi k_1 h} \ln R_c, \quad (18)$$

из соотношений (17) и (18) можно записать выражение для дебита скважины Q с трещиной ГРП:

$$Q = Q_0 \frac{\ln \frac{R_c}{r_w}}{\ln \frac{R_c}{r_w} + S}. \quad (19)$$

Здесь Q_0 – дебит скважин без трещины ГРП; S – скин-фактор, отражающий наличие у скважины трещины ГРП:

$$Q_0 = \frac{2\pi k_1 h}{\mu} \frac{p_c - p_w}{\ln \frac{R_c}{r_w}}; \quad S = -\frac{2\lambda}{1 + \lambda} \left(\ln \frac{l + \delta}{2r_w} - (1 - \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{4n}}{n(1 - \lambda q^{4n})} \right). \quad (20)$$

На практике при оценке эффективности ГРП широко используется параметр безразмерной проводимости трещины $F_{CD} = \frac{k_2 \delta}{k_1 l}$ [3]. Обозначим $\varepsilon_1 = \frac{k_1}{k_2}$, $\varepsilon_2 = \frac{\delta}{l}$. Учитывая, что $\varepsilon_1 \ll 1$ и $\varepsilon_2 \ll 1$ выражения для $\lambda = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$, $q = \sqrt{\frac{l - \delta}{l + \delta}}$ и F_{CD} можно записать в виде $\lambda = 1 - 2\varepsilon_1$, $q = 1 - \varepsilon_2$ и $F_{CD} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. В этом случае второе выражение (20) при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, но $F_{CD} = \text{const}$, можно представить как функцию от F_{CD} :

$$S = -\ln \frac{l}{2r_w} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2nF_{CD} + 1)}. \quad (21)$$

Характер изменения скин-фактора S как функции от F_{CD} приведён на рис. 2. Из рис. 2 видно, что при $F_{CD} > 10$ величина S меняется слабо, т. е. дальнейшее повышение F_{CD} с целью увеличения величины дебита скважины Q становится неэффективным.

Зависимость (21) и построенный на её основе график изменения скин-фактора S полностью соответствует результатам работ [4, 5], основанным на обработке различных эмпирических данных.

3. Модифицированная постановка задачи. Рассмотрим модифицированную постановку задачи (1)–(3), позволяющую наиболее просто найти выражения для скин-фактора S .

Величину давления p_1 и комплексной скорости $u_1 + i v_1$ течения жидкости в пласте можно выразить через комплексный потенциал $\Phi_1(z)$ следующим образом:

$$p_1 = \frac{\mu}{k_1 h} \operatorname{Re} \Phi_1(z); \quad u_1 + i v_1 = -\overline{\Phi_1'(z)}. \quad (22)$$

Тогда нормальную компоненту скорости течения жидкости на линии раздела трещины и пласта u_n можно выразить через $\Phi_1(z)$ как

$$u_n = -\operatorname{Im} \left(\frac{d\Phi_1}{ds} \right), \quad (23)$$

где $z = z_1(s)$ — уравнение границы трещины в комплексной форме.

С учётом граничного условия на контуре питания (18) выражение (4) для $\Phi_1(z)$ можно представить в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{k_1 h}{\mu} p_c + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z}{R_c} + k_1 \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{-2n}. \quad (24)$$

Для записи уравнений фильтрации в области, занятой трещиной, усредним уравнения (1)–(2) по y при $|x| < l$ и запишем их в виде

$$q(x) = \frac{k_2 h}{\mu} w(x) \frac{dp_2}{dx}; \quad \frac{dq}{dx} = -u_n(x), \quad (25)$$

где $q(x) = \int_0^{w(x)} u_2(x, y) dy$; $u_n = v_2(x, w(x))$; $w(x) = \delta \sqrt{1 - (x/l)^2}$.

В безразмерной переменной $\xi = x/l$ эти уравнения можно переписать в виде

$$\frac{dp_2}{d\xi} = \frac{\mu}{k_1 h} q(\xi) / F_{CD} \sqrt{1 - \xi^2}; \quad \frac{dq}{d\xi} = -l u_n(\xi). \quad (26)$$

Из второго уравнения (26) и выражения (23) для u_n следует, что

$$q(\xi) = \operatorname{Im} \Phi_1(\xi). \quad (27)$$

Первое уравнение (26) с учетом (22), граничного условия (7) и условия $\delta/l \ll 1$ можно переписать как

$$\frac{dp_1}{d\xi} = \operatorname{Re} \Phi_1'(\xi) = q(\xi) / F_{CD} \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (28)$$

Следовательно, уравнения (27)–(28) можно записать в виде дополнительного граничного условия на потенциал течения $\Phi_1(z)$:

$$F_{CD} \sqrt{1 - \xi^2} \operatorname{Re} \Phi_1'(\xi) = \operatorname{Im} \Phi_1(\xi), \quad |\xi| \leq 1 \quad (29)$$

или, после замены $\xi = \cos \alpha$, в виде

Рис. 2. Зависимость величины скин-фактора S от величины F_{CD}

$$F_{CD} \operatorname{Re} \Phi_1'(\alpha) + \operatorname{Im} \Phi_1(\alpha) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (30)$$

Заменив последнее слагаемое в (24) выражением (10), граничное условие (30) можно записать как

$$F_{CD} \left(\operatorname{tg} \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n \sin 2n\alpha \right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin 2n\alpha = 0, \quad (31)$$

где $a_n = 2\pi k_1 A_n / Q$.

Из уравнения (31) легко находятся неизвестные коэффициенты a_n в представлении для потенциала $\Phi_1(z)$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{2nF_{CD}}{1+2nF_{CD}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{1}{1+2nF_{CD}} \right). \quad (32)$$

Оставшееся граничное условие (равенство давления p на контуре скважины $z_w = r_w e^{i\alpha}$ величине p_w) позволяет связать значение дебита скважины Q с величиной перепада давления $p_c - p_w$ в виде выражения (19), где значение скин-фактора S вычисляется как

$$S = -\ln \frac{l}{2r_w} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2nF_{CD} + 1)}. \quad (33)$$

Как видим, выражение (33) для S полностью совпадает с (21), но получено значительно проще. Данная модифицированная постановка задачи фильтрации жидкости с учётом тонких трещиноподобных включений может быть успешно применена в различных задачах: фильтрация с трещиной ГРП при переменном коэффициенте проницаемости в трещине $k_2(x, y)$, фильтрация жидкости в пласте с системой трещиноподобных включений и т.п.

Заключение. Таким образом, задача о фильтрации трещины жидкости к скважине при наличии узкой области с более высокой проницаемостью (трещина ГРП) сводится к задаче сопряжения двух аналитических функций на границе раздела «пласт – трещина». Наиболее просто такая задача решается при представлении трещины в виде разреза нулевой толщины, но конечной проводимости. В работе получена аналитическая зависимость величины скин-фактора трещины S от безразмерного коэффициента проводимости F_{CD} , которая соответствует известным экспериментальным данным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Каневская, Р. Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта [Текст] / Р. Д. Каневская. — М.: Недра, 1999. — 212 с.
2. Азиз, Х. Математическое моделирование пластовых систем [Текст] / Х. Азиз, Э. Сеттари. — М.-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., — 2004. — 416 с.
3. Мукерджи, Х. Производительность скважин [Текст] / Х. Мукерджи. — М.: Schlumberger, 2001. — 184 с.
4. Prats, M. Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior-Incompressible Fluid Case [Text] / M. Prats // SPE J. — 1961. — No. 1. — P. 105–118.
5. The Effect of Vertical Fractures on Well Productivity [Text] / W. Mc. Guire // J. of Petroleum Technology. — 1960. — No. 12. — P. 72–74.