Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. У. Хубиев, Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 155–158

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu546>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:49:36

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.946

К. У. Хубиев

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Исследуется аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами. Доказана теорема о существовании и единственности решения при определённых условиях, накладываемых на коэффициенты.

Рассмотрим нагруженное [1] уравнение гиперболо-параболического типа

$$u_{xx} - H(-y)u_{yy} + au_x + bu_y + cu + du(x + H(-y)y, 0) = f \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной отрезками AA_0 , BB_0 , A_0B_0 прямых $x=0$, $x=1$, $y=T>0$ соответственно, и характеристиками $AC: x+y=0$ $BC: x-y=1$. Через Ω^+ и Ω^- обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно, а через I — интервал $0 < x < 1$ прямой $y=0$; $a=a(x, y)$, $b=b(x, y) < 0$, $c=c(x, y)$, $d=d(x, y)$, $f=f(x, y)$ — заданные непрерывные функции; $H(y)$ — функция Хевисайда.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовём функцию $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega \setminus I)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$.

Следуя [2], обозначим через $\theta_0(x) = (\frac{x}{2}, -\frac{x}{2})$ аффикс точки x .

ЗАДАЧА. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее крайевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (2)$$

$$u[\theta_0(x)] = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — заданные непрерывные функции, $\psi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, причём $\varphi_1(0) = \psi(0)$.

Пусть существует решение $u(x, y)$ задачи (1)–(3). Обозначим $u(x, 0) = \tau(x)$, $u_y(x, 0) = v(x)$. Тогда $\tau(0) = \psi(0)$, $\tau(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$, $v(x) \in C(I)$.

Рассмотрим функцию $w(x, y) = u(x, y) + \lambda(x, y)u(x + y, 0) = u(x, y) + \lambda(x, y)\tau(x + y)$. Заметим, что при $\lambda(x, 0) \neq -1$ эта замена является обратимой, и $u(x, y) = w(x, y) - \frac{\lambda(x, y)}{1 + \lambda(x + y, 0)}w(x + y, 0)$.

Уравнение (1) запишется в виде

$$f = \begin{cases} w_{xx} + aw_x + bw_y + cw + F_1[\tau(x + y)], & y > 0, \\ w_{xx} - w_{yy} + aw_x + bw_y + cw + F_2[\tau(x + y)], & y < 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} F_1[\tau(x + y)] &= d\tau(x) - [\lambda_{xx}(x, y) + a\lambda_x(x, y) + b\lambda_y(x, y) + c\lambda(x, y)]\tau(x + y) - \\ &\quad - [2\lambda_x(x, y) + (a + b)\lambda(x, y)]\tau'(x + y) - \lambda(x, y)\tau''(x + y), \\ F_2[\tau(x + y)] &= (d - [\lambda_{xx}(x, y) - \lambda_{yy}(x, y) + a\lambda_x(x, y) + b\lambda_y(x, y) + c\lambda(x, y)])\tau(x + y) - \\ &\quad - [2\lambda_x(x, y) - 2\lambda_y(x, y) + (a + b)\lambda(x, y)]\tau'(x + y). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы в области Ω выполнялись следующие условия:

$$\lambda_{xx}(x, y) - \lambda_{yy}(x, y) + a\lambda_x(x, y) + b\lambda_y(x, y) + c\lambda(x, y) = d, \quad (4)$$

$$\lambda_x(x, y) - \lambda_y(x, y) + \frac{a + b}{2}\lambda(x, y) = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) будет выглядеть следующим образом:

$$\lambda(x, y) = \gamma \exp \left(-\frac{1}{4} \int_{x+y}^{x-y} [a(x+y, t) + b(x+y, t)] dt \right), \quad (6)$$

где γ — произвольная константа.

Подставляя значение $\lambda(x, y)$ из (6) в (4), получим, что в области Ω коэффициенты уравнения (1) должны удовлетворять условию

$$a^2 - b^2 + 2a_x + 2a_y + 2b_x + 2b_y - 4c = \frac{4}{\gamma} d \exp \left(\frac{1}{4} \int_{x+y}^{x-y} [a(x+y, t) + b(x+y, t)] dt \right),$$

где $\gamma \neq 0$.

При выполнении этого условия в области Ω и условия $F_2[\tau(x+y)] \equiv 0$ уравнение примет вид

$$f = \begin{cases} w_{xx} + aw_x + bw_y + cw + F_1[\tau(x+y)], & y > 0, \\ w_{xx} - w_{yy} + aw_x + bw_y + cw, & y < 0, \end{cases} \quad (7)$$

а краевое условие (3) —

$$w[\theta_0(x)] = \psi(x) + \lambda\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) \tau(0) = \psi(x) + \lambda\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) \psi(0) = \psi_1(x), \quad (8)$$

$$\text{где } \lambda\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \gamma \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^x [a(0, t) + b(0, t)] dt \right).$$

Учитывая, что $\lambda(x, 0) = \gamma$, $\lambda_x(x, 0) = \lambda_{xx}(x, 0) = 0$, $\lambda_y(x, 0) = \frac{\gamma}{2} [a(x, x) + b(x, x)]$, обозначим

$$w(x, 0) = [1 + \lambda(x, 0)] \tau(x) = [1 + \gamma] \tau(x) = \tau_1(x), \quad (9)$$

$$w_y(x, 0) = v(x) + \frac{\gamma}{2} [a(x, x) + b(x, x)] \tau(x) + \gamma \tau'(x) = v_1(x). \quad (10)$$

Переходя в уравнении (7) к пределу при $y \rightarrow +0$ и учитывая, что

$$F_1[\tau(x)] = \left(d(x, 0) - \gamma c(x, 0) - \frac{\gamma b(x, 0)}{2} [a(x, x) + b(x, x)] \right) \tau(x) - \gamma [a(x, 0) + b(x, 0)] \tau'(x) - \gamma \tau''(x),$$

$\tau_1(x) = (1 + \gamma) \tau(x)$, $\tau'_1(x) = (1 + \gamma) \tau'(x)$, $\tau''_1(x) = (1 + \gamma) \tau''(x)$, $\gamma \neq -1$, после несложных преобразований получим

$$\tau''_1(x) + a_2 \tau'_1(x) + c_2 \tau_1 = f_2 - b_2 v_1(x), \quad (11)$$

где $a_2 = a(x, 0) - \gamma b(x, 0)$, $c_2 = c(x, 0) + d(x, 0) - \frac{\gamma}{2} b(x, 0) [a(x, x) + b(x, x)]$, $b_2 = (1 + \gamma) b(x, 0)$, $f_2 = (1 + \gamma) f(x, 0)$. При этом $\tau_1(0) = (1 + \gamma) \varphi_1(0)$, $\tau_1(1) = (1 + \gamma) \varphi_2(0)$.

Решая задачу Коши (9), (10) для уравнения (7) в области Ω^- [3], получим

$$w(x, y) = \frac{1}{2} [R(x, y; x+y, 0) \tau_1(x+y) + R(x, y; x-y, 0) \tau_1(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} R(x, y; \xi, 0) v_1(\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} [R_\eta(x, y; \xi, 0) + b(\xi, 0) R(x, y; \xi, 0)] \tau_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x+y-\eta}^{x-y+\eta} R(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (12)$$

где $R(x, y; \xi, \eta)$ — функция Римана, определяемая как решение задачи Гурса

$$R_1 = R(x, y; \xi, \eta) \Big|_{\eta=x+y-\xi} = \exp \left(\frac{1}{2} \int_x^\xi a(t, x+y-t) + b(t, x+y-t) dt \right),$$

$$R_2 = R(x, y; \xi, \eta) \Big|_{\eta=\xi-x+y} = \exp \left(\frac{1}{2} \int_x^\xi a(t, t-x+y) + b(t, t-x+y) dt \right),$$

для уравнения $R_{\xi\xi} - R_{\eta\eta} - (aR)_\xi - (bR)_\eta + cR = 0$.

Подчиняя (12) условию (8), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} R_2\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; x, 0\right) \tau_1(x) + \int_0^x \left[R_\eta\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; x, 0\right) + b(\xi, 0) R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; \xi, 0\right) \right] \tau_1(\xi) d\xi = 2\psi_1(x) - \\ - R_1\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; 0, 0\right) \psi_1(0) + \int_0^{-\frac{x}{2}x+\eta} \int_{-\eta} R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; \xi, \eta\right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^x R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; \xi, 0\right) v_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим теперь в области Ω для уравнения

$$\begin{cases} z_{xx} + a_1(x, y)z_x + b_1(x, y)z_y + c_1(x, y)z = f_1(x, y), & y > 0, \\ z_{xx} - z_{yy} + a(x, y)z_x + b(x, y)z_y + c(x, y)z = f(x, y), & y < 0, \end{cases} \quad (14)$$

задачу:

$$z(0, y) = (1 + \gamma)\varphi_1(y), \quad z(1, y) = (1 + \gamma)\varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (15)$$

$$z[\theta_0(x)] = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (16)$$

где $a_1(x, 0) = a_2$, $b_1(x, 0) = b_2$, $c_1(x, 0) = c_2$, $f_1(x, 0) = f_2$.

Обозначим $z(x, 0) = \tau_2(x)$, $z_y(x, 0) = v_2(x)$. Действуя таким же образом, как и выше, получим точно такие же функциональные отношения между $\tau_2(x)$ и $v_2(x)$, как и (11), (13) для $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$:

$$\tau_2''(x) + a_2\tau_2'(x) + c_2\tau_2 = f_2 - b_2v_2(x), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} R_2\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; x, 0\right) \tau_2(x) + \int_0^x \left[R_\eta\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; \xi, 0\right) + b(\xi, 0) R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; \xi, 0\right) \right] \tau_2(\xi) d\xi = 2\psi_1(x) - \\ - R_1\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; 0, 0\right) \psi_1(0) + \int_0^{-\frac{x}{2}x+\eta} \int_{-\eta} R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; \xi, \eta\right) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^x R\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}; \xi, 0\right) v_2(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

Задача (14)–(16) будет иметь единственное решение при выполнении следующих условий [4]:

1) в $\bar{\Omega}^+$ функции $a_1(x, y)$, $b_1(x, y)$, $c_1(x, y)$, $f_1(x, y)$ непрерывны и удовлетворяют по x условию Гёльдера, причём b_1 удовлетворяет условию Гёльдера ещё и по y ; кроме того,

$$\forall (x, y) \in \bar{\Omega}^+ : \quad b_1(x, y) \leq \text{const} < 0, \quad c_1(x, y) < 0; \quad (19)$$

2) функции $a(x, y)$, $b(x, y) \in C^2(\bar{\Omega}^-)$, $c(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}^-)$, $f(x, y) \in C(\Omega^-)$ и удовлетворяют условиям

$$a^2 - b^2 + 2a_x + 2a_y + 2b_x + 2b_y - 4c > 0, \quad a(x, y) + b(x, y) > 0, \quad c \geq 0. \quad (20)$$

Если задача (14)–(16) будет иметь единственное решение, то система (17), (18) будет разрешима единственным образом. Из однозначной разрешимости системы уравнений (17), (18) следует однозначная разрешимость системы уравнений (11), (13) при условии, что функции a_2 , b_2 , c_2 , f_2 удовлетворяют условию (19), а a , b , c , f — условию (20). После нахождения $\tau_1(x)$ легко найти $\tau(x)$, а далее, возвращаясь к функции $u(x, y)$, решение задачи (1)–(3) сводится к последовательному решению первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω^+ и, соответственно, первой задачи Дарбу для уравнения (1) в области Ω^- .

Таким образом, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Если коэффициенты уравнения (1) таковы, что

1) в области $\bar{\Omega}$

$$a^2 - b^2 + 2a_x + 2a_y + 2b_x + 2b_y - 4c = \frac{4}{\gamma} d \exp \left(\frac{1}{4} \int_{x+y}^{x-y} [a(x+y, t) + b(x+y, t)] dt \right),$$

где γ — произвольная постоянная, удовлетворяющая условиям $\gamma \neq 0$ и $\gamma > -1$;

2) в области $\bar{\Omega}^+$ функции $a(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$, $f(x, y)$ непрерывны и удовлетворяют условию Гёльдера по x , $b(x, y) \leq \text{const} < 0$ непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера по x и по y , кроме того

$$c(x, 0) + d(x, 0) - \frac{\gamma}{2} b(x, 0) [a(x, x) + b(x, x)] < 0, \quad c(x, y) < 0;$$

3) в области $\bar{\Omega}^-$ $a(x, y)$, $b(x, y) \in C^2(\bar{\Omega}^-)$, $c(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}^-)$, $d(x, y)$, $f(x, y) \in C(\Omega^-)$, $a(x, y) + b(x, y) > 0$, $\gamma d(x, y) \geq 0$, $c \geq 0$; то задача (1)–(3) имеет, и притом единственное, решение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии [Текст] / А. М. Нахушев. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.
2. Нахушев, А. М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения [Текст] / А. М. Нахушев. // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 187. — № 4. — С. 736–739.
3. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1977. — 735 с.
4. Джураев, Т. Д. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа [Текст] / Т. Д. Джураев, А. С. Соппуев, М. Мамажанов. — Ташкент: ФАН, 1986. — 220 с.

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик
hubiev1976@mail.ru

Поступила 07.11.2006

УДК 517.927.25+517.984.5

А. С. Царева

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ГИЛЬБЕРТОВОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Получено достаточное условие гильбертовости систем собственных функций обыкновенного линейного несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка при условии, что мнимые части спектральных параметров достаточно велики по модулю.

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, а $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая система элементов этого пространства. Будем называть систему $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертовой в $\mathbb{H}$, если $\exists \alpha > 0, \forall f \in \mathbb{H}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)|^2 \geq \alpha \|f\|^2, \quad (1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение, а $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{H}$.

Согласно известной теореме Н. К. Бари [1], для установления безусловной базисности той или иной системы функций в $\mathbb{H}$ (без привлечения биортогональной системы) необходимо доказать гильбертовость системы $\{u_n \|u_n\|^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$. Это делает изучение условий гильбертовости одной из важнейших задач спектральной теории.

Пусть теперь $\mathbb{H} = L_2(G)$, где G — некоторый интервал вещественной оси, а $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система собственных функций (далее ССФ) некоторого линейного обыкновенного дифференциального оператора (далее ДО) второго порядка

$$Lu = u'' + q(x)u, \quad q(x) \in L_1(G), \quad (2)$$