Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Царева, Достаточное условие гильбертовости некоторых систем собственных функций дифференциального оператора второго порядка, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 158–161

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:13:04

ТЕОРЕМА. Если коэффициенты уравнения (1) таковы, что

1) в области $\bar{\Omega}$

$$a^2 - b^2 + 2a_x + 2a_y + 2b_x + 2b_y - 4c = \frac{4}{\gamma} d \exp \left(\frac{1}{4} \int_{x+y}^{x-y} [a(x+y, t) + b(x+y, t)] dt \right),$$

где γ — произвольная постоянная, удовлетворяющая условиям $\gamma \neq 0$ и $\gamma > -1$;

2) в области $\bar{\Omega}^+$ функции $a(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$, $f(x, y)$ непрерывны и удовлетворяют условию Гёльдера по x , $b(x, y) \leq \text{const} < 0$ непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера по x и по y , кроме того

$$c(x, 0) + d(x, 0) - \frac{\gamma}{2} b(x, 0) [a(x, x) + b(x, x)] < 0, \quad c(x, y) < 0;$$

3) в области $\bar{\Omega}^-$ $a(x, y)$, $b(x, y) \in C^2(\bar{\Omega}^-)$, $c(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}^-)$, $d(x, y)$, $f(x, y) \in C(\Omega^-)$, $a(x, y) + b(x, y) > 0$, $\gamma d(x, y) \geq 0$, $c \geq 0$; то задача (1)–(3) имеет, и притом единственное, решение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии [Текст] / А. М. Нахушев. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.
2. Нахушев, А. М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения [Текст] / А. М. Нахушев. // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 187. — № 4. — С. 736–739.
3. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1977. — 735 с.
4. Джураев, Т. Д. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа [Текст] / Т. Д. Джураев, А. С. Соппуев, М. Мамажанов. — Ташкент: ФАН, 1986. — 220 с.

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик
hubiev1976@mail.ru

Поступила 07.11.2006

УДК 517.927.25+517.984.5

А. С. Царева

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ГИЛЬБЕРТОВОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Получено достаточное условие гильбертовости систем собственных функций обыкновенного линейного несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка при условии, что мнимые части спектральных параметров достаточно велики по модулю.

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, а $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая система элементов этого пространства. Будем называть систему $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертовой в $\mathbb{H}$, если $\exists \alpha > 0, \forall f \in \mathbb{H}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)|^2 \geq \alpha \|f\|^2, \quad (1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение, а $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{H}$.

Согласно известной теореме Н. К. Бари [1], для установления безусловной базисности той или иной системы функций в $\mathbb{H}$ (без привлечения биортогональной системы) необходимо доказать гильбертовость системы $\{u_n \|u_n\|^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$. Это делает изучение условий гильбертовости одной из важнейших задач спектральной теории.

Пусть теперь $\mathbb{H} = L_2(G)$, где G — некоторый интервал вещественной оси, а $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система собственных функций (далее ССФ) некоторого линейного обыкновенного дифференциального оператора (далее ДО) второго порядка

$$Lu = u'' + q(x)u, \quad q(x) \in L_1(G), \quad (2)$$

понимаемая в соответствии с работами В. А. Ильина [2], т. е. безотносительно к виду краевых условий, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — соответствующая ей система спектральных параметров (далее ССП).

Несмотря на некоторые успехи в изучении условий гильбертовости (см. в частности [3–5]), критериев гильбертовости для случая, когда мнимые части спектральных параметров не ограничены, до сих пор не были получены.

В настоящей работе предлагается следующий подход к изучению гильбертовости: предполагая, что соответствующая система тригонометрических функций является гильбертовой с константой α , рассмотреть вопрос о том, будет ли ССФ ДО (2) гильбертовой.

Будем в дальнейшем предполагать, что ни на каком внутреннем, связном с мерой, отличной от нуля, промежутке интервала G собственная функция не является тождественным нулём.

ЛЕММА. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ССФ ДО (2) на интервале $G = (a; b)$, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ССП. Тогда для $\forall n$, $\exists z_n \in G_{\mu_n}$, $G_{\mu_n} = \left(s - \frac{1}{2} |\mu_n|^{-1}, s + \frac{1}{2} |\mu_n|^{-1}\right)$, $s = \frac{(b+a)}{2}$ такие, что

$$u'_n(z_n) = C_n \cdot \mu_n \cdot u_n(z_n), \quad (3)$$

где C_n — комплексные константы такие, что $\exists \bar{C} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|C_n| \leq \bar{C}$, причём $\bar{C}$ зависит лишь от выбора коэффициента $q(x)$ ДО (2).

Доказательство. Возьмём в качестве z_n , точку в которой модуль собственной функции u_n достигает своего максимального значения на интервале G_{μ_n} , т. е.

$$|u_n(z_n)| = \|u_n\|_{C(G_{\mu_n})} \neq 0. \quad (4)$$

Воспользуемся оценкой модуля производной собственной функции, полученной в работе [6, стр. 30]:

$$|u'_n(z_n)| \leq \bar{C} |\mu_n| \|u_n\|_{L_{\infty}(G_{\mu_n})} \leq \bar{C} |\mu_n| \|u_n\|_{C(G_{\mu_n})}, \quad (5)$$

где константа $\bar{C} > 0$ не зависит от μ_n , z_n , меры интервала G_{μ_n} , а зависит лишь от коэффициента оператора (2).

Из (4) и (5) следует $|C_n| \leq \bar{C}$. Что и требовалось доказать. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ССФ ДО (2), из которой можно выделить подпоследовательность собственных функций $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что:

- 1) $|\operatorname{Im} \mu_n| \geq \mu_0 > 0$ ($n \in \mathbb{N}$), где μ_0 — достаточно большое число;
- 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^{-2}$ — сходится.

Тогда из гильбертовости системы

$$\left\{ \frac{\cos(\mu_n(x - z_n)) + C_n \sin(\mu_n(x - z_n))}{\|\cos(\mu_n(x - z_n)) + C_n \sin(\mu_n(x - z_n))\|_{L_2(G)}} \right\}, \quad (6)$$

(последовательности точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и констант $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ определены в лемме следует гильбертовость нормированных ССФ: $\{u_n \|u_n\|_{L_2(G)}^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_k \|g_k\|_{L_2(G)}^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, u_n)|^2}{\|u_n\|_{L_2(G)}^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \int_{z_n}^b f(x) u_n(x) dx + \int_a^{z_n} f(x) u_n(x) dx \right|^2}{\|u_n\|_{L_2(G)}^2}. \quad (7)$$

Сделаем замену переменной $x = z_n + r$ под первым интегралом, $x = z_n - r$ — под вторым и воспользуемся формулами В. В. Тихомирова [7]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, u_n)|^2}{\|u_n\|_{L_2(G)}^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^{b-z_n} f(z_n + r) \left\{ u_n(z_n) F_0^+(r) + u'_n(z_n) \frac{\Phi_0^+(r)}{\mu_n} \right\} dr + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{z_n-a} f(z_n - r) \left\{ u_n(z_n) F_0^-(r) - u'_n(z_n) \frac{\Phi_0^-(r)}{\mu_n} \right\} dr \right|^2 \cdot \|u_n\|_{L_2(G)}^{-2}, \quad (8) \end{aligned}$$

где функции $F_0^\pm(r)$ и $\Phi_0^\pm(r)$ определены в [7].

Используя оценки для $F_0^\pm$ и $\Phi_0^\pm$ [8] и лемму, преобразуем равенство (8) к следующему виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, u_n)|^2}{\|u_n\|_{L_2(G)}^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n(z_n)|^2}{\|u_n\|_{L_2(G)}^2} \left| \int_0^{b-z_n} f(z_n+r) \left\{ \cos(\mu_n r) + \sin(\mu_n r) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \mu_n| r}}{|\mu_n|}\right) \right\} dr + \right. \\ \left. + \int_0^{z_n-a} f(z_n-r) \left\{ \cos(\mu_n r) - \sin(\mu_n r) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \mu_n| r}}{|\mu_n|}\right) \right\} dr \right|^2. \quad (9)$$

Вернёмся к «старой» переменной, воспользовавшись чётностью и нечётностью функций $\cos$ и $\sin$, соответственно, неравенством Коши—Буняковского и элементарной оценкой, верной для любых комплексных чисел a_1, a_2, a_3 $|a_1 + a_2 + a_3|^2 \geq \frac{1}{3}|a_1|^2 - |a_2|^2 - |a_3|^2$, из (9) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, u_n)|^2}{\|u_n\|_{L_2(G)}^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n(z_n)|^2}{3\|u_n\|_{L_2(G)}^2} \left| \int_a^b f(x) \left\{ \cos(\mu_n(x-z_n)) + \sin(\mu_n(x-z_n)) \right\} dx \right|^2 - \\ - \|f\|_{L_2(G)}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n(z_n)|^2}{\|u_n\|_{L_2(G)}^2} O\left(\frac{e^{2|\operatorname{Im} \mu_n| R}}{|\operatorname{Im} \mu_n| |\mu_n|^2}\right) = S_1 - S_2, \quad (10)$$

где $R = \max\{b - z_n; z_n - a\}$.

Рассмотрим теперь каждую сумму в (10) отдельно. Первую сумму S_1 умножим и разделим на квадрат нормы $\|\cos(\mu_n(x-z_n)) + C_n \sin(\mu_n(x-z_n))\|_{L_2(G)}^2$. Воспользуемся оценкой [9]:

$$|u_n(z_n)| \leq C_1 \sqrt{|\operatorname{Im} \mu_n|} e^{-|\operatorname{Im} \mu_n| r} \|u_{n,k}\|_{L_2(G)}, \quad (11)$$

где $r = \operatorname{dist}\{z_n; \partial G\}$, константа $C_1 > 0$ зависит лишь от меры интервала G и коэффициента оператора (2). Из (11) и условия гильбертовости системы функций (6) имеем

$$S_1 \geq 2\alpha' \|f\|_{L_2(G)}^2, \quad (12)$$

где $\alpha' > 0$ — зависит лишь от константы, что следует из неравенства Гильберта (1) для системы функций (6).

Рассмотрим теперь вторую сумму — S_2 из формулы (10). Исходя из построения (см. лемму) точек z_n , несложно убедиться, что $e^{|\operatorname{Im} \mu_n| r} = \operatorname{const} \cdot e^{|\operatorname{Im} \mu_n| R}$, тогда с помощью оценки (11) легко получить

$$S_2 \leq C_2 \|f\|_{L_2(G)}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n|^2}, \quad (13)$$

где константа $C_2 > 0$ зависит только от меры интервал G и коэффициента оператора (2).

Из условий 1 и 2 теоремы и неравенств (10)–(13) следует доказываемое утверждение. $\square$

Для построения примера, иллюстрирующего теорему 1, воспользуемся следующим утверждением [10, стр. 24]:

ТЕОРЕМА 2. Система $\{e^{i(n+\beta_1)x+\gamma_1}; e^{-i(k+\beta_2)x+\gamma_2}\}_{n=0, k=1}^{\infty}$, где β_i, γ_i ($i = 1, 2$) — комплексные параметры, образует базис Рисса в $L_2(-\pi; \pi)$ тогда и только тогда, когда $|\operatorname{Re}(\beta_1 + \beta_2)| < \frac{1}{2}$.

ПРИМЕР. Рассмотрим двойную систему экспонент $\{e^{i\mu_n x}; e^{i\mu_k x}\}_{n=0, k=1}^{\infty}$, где

$$\{\mu_n; \mu_k\}_{n=0, k=1}^{\infty} = \{n + i\beta; -k - i\beta\}_{n=0, k=1}^{\infty}, \quad (14)$$

а β — некоторое очень большое положительное число.

Для этой системы выполнены все условия теоремы 1. Система $\{e^{i\mu_n x} \|e^{i\mu_n x}\|^{-1}; e^{i\mu_k x} \|e^{i\mu_k x}\|^{-1}\}$ — гильбертова в $L_2(-\pi; \pi)$; это следует из теоремы 2. Следовательно, любая нормированная ССФ

ДО (2), отвечающая ССП (14), с константами $C_n = i$ в точках $z_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) будет гильбертовой в $L_2(-\pi; \pi)$.

Автор выражает благодарность проф. В. Д. Будаеву за постановку задачи и неоднократное обсуждение результатов работы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бари, Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве [Текст] / Н. К. Бари // Уч. зап. МГУ. — 1951. — Т. 4, Вып. 1. — С. 69–107.
2. *Ильин, В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений [Текст] / В. А. Ильин // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 5. — С. 771–794.
3. *Ильин, В. А.* Неравенство типа Гильберта по системе собственных функций оператора Лапласа для радиальной функции, отличной от нуля в шаре достаточно малого радиуса [Текст] / В. А. Ильин // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 291, № 6. — С. 1292–1296.
4. *Будаев, В. Д.* О неравенствах Гильберта и Бесселя для некоторых возмущённых систем функций [Текст] / В. Д. Будаев // Полианалитические функции: граничные свойства и краевые задачи: Межвуз. сб. науч. тр. — Смоленск: СГПИ, 1997. — С. 100–107.
5. *Малов, А. А.* Достаточные условия выполнения неравенства типа Гильберта по системе корневых функций обыкновенного дифференциального оператора второго порядка [Текст] / А. А. Малов // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 2. — С. 197–203.
6. *Будаев, В. Д.* Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов [Текст] / В. Д. Будаев: Дис. . . . д-ра. физ.-мат. наук: 01.02.04. — М.: МГУ, 1993. — 242 с.
7. *Тихомиров, В. В.* Точные оценки регулярного решения одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметром [Текст] / В. В. Тихомиров // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 273, № 4. — С. 807–810.
8. *Тихомиров, В. В.* Точные оценки собственных функций произвольного несамосопряжённого оператора Шредингера [Текст] / В. В. Тихомиров // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 8. — С. 1378–1385.
9. *Царева, А. С.* Некоторые оценки норм корневых функций дифференциального оператора второго порядка [Текст] / А. С. Царева // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: Межвуз. сб. науч. тр. — Смоленск: СмолГУ, 2006. — Вып. 7. — С. 106–116.
10. *Билалов, Б. Т.* Базисные свойства систем собственных функций некоторых дифференциальных операторов и их обобщение [Текст] / Б. Т. Билалов: Дис. . . . д-ра. физ.-мат. наук: 01.02.04. — М.: МГУ, 1995. — 216 с.