Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Моргачев, Нестационарная динамика кольцевой пластины Тимошенко переменной толщины, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 162–164

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:44:54

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.3

К. С. Моргачев

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Приводится сравнение результатов вычислений, полученных при решении нестационарной динамической задачи для кольцевой пластины Тимошенко кусочно-переменной толщины (составленной из набора кольцевых пластин Тимошенко постоянной толщины) в рядах по собственным формам и для пластины Тимошенко толщины, изменяющейся непрерывно по радиусу пластины, численным решением уравнений равновесия (движений), полученных применением вариационного принципа Гамильтона—Остроградского.

Введение. В инженерной практике нередко возникает необходимость проведения расчётов на динамические воздействия элементов сооружений и машин в форме тел вращения (перекрытия и покрытия круглых в плане зданий и сооружений, фундаменты под технологические установки и оборудование, диски турбин).

Одним из способов повышения достоверности динамических расчётов элементов конструкций в форме тел вращения является переход к более совершенным кинематическим моделям в теории колебаний пластин: например, к уточнённой модели Тимошенко вместо классической модели Кирхгофа—Лява [1]. При таком подходе тело вращения, которое в общем случае может быть переменной толщины, схематизируется кольцевой пластиной Тимошенко переменной толщины.

Ниже рассматриваются два подхода (и соответственно, две расчетных модели) к построению решения нестационарной динамической задачи для кольцевой пластины Тимошенко переменной толщины.

Рис. 1. Поперечные профили расчётных моделей I (—) и II (---)

выше, r_{int} и r_{ext} — безразмерные внутренний и внешний радиусы пластин по моделям I и II), полученных с использованием вариационного принципа Гамильтона—Остроградского.

1. Вывод уравнений равновесия (движения) для пластины по модели II. При движениях пластины по модели II на отрезке времени $[0, t]$ (t — безразмерное время, отнесённое к $\frac{R\sqrt{1-\nu^2}}{c}$; $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — скорость звука в материале пластины плотностью ρ , с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν) под действием нагрузки $q(r, \theta, t)$ согласно вариационному принципу Гамильтона—Остроградского (принципу наименьшего действия) истинные траектории её движений должны отличаться от других возможных траекторий тем, что для них вариация полной энергии деформации пластины должна быть равна нулю [3]:

$$\delta \left(\int_0^t (T - \Pi + A) dt \right) = 0, \quad (1)$$

где T , Π и A — соответственно полные кинетическая и потенциальная энергии деформации пластины и работа внешней силы $q(r, \theta, t)$, действующей на пластину.

Полная кинетическая энергия пластины по модели II, определяемая как сумма кинетических энергий движения пластины в поперечном, радиальном и тангенциальном направлениях, задаётся выражением

$$T = \frac{ER^3}{2(1-\nu^2)} \int_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} \int_0^{2\pi} \varepsilon(r) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2(r)}{12} \left[\left(\frac{\partial \vartheta_r}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta, \quad (2)$$

где $u = u(r, \theta, t)$, $\vartheta_r = \vartheta_r(r, \theta, t)$, $\vartheta_\theta = \vartheta_\theta(r, \theta, t)$ — безразмерные поперечное перемещение и компоненты осреднённого поворота, которые с учётом периодичности кольцевой пластины по угловой координате θ можно записать в виде [2]:

$$u(r, \theta, t) = u_m(r, t) \cos(m\theta), \quad \vartheta_r(r, \theta, t) = \vartheta_{r_m}(r, t) \cos(m\theta), \quad \vartheta_\theta(r, \theta, t) = \vartheta_{\theta_m}(r, t) \sin(m\theta), \quad (3)$$

где $u_m = u_m(r, t)$, $\vartheta_{r_m} = \vartheta_{r_m}(r, t)$, $\vartheta_{\theta_m} = \vartheta_{\theta_m}(r, t)$ — безразмерные амплитудные значения поперечного перемещения и компонент осреднённого поворота, m — число узловых диаметров ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Полную потенциальную энергию пластины запишем по аналогии с [4]:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{ER^3}{4} \int_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\varepsilon^3(r)}{12(1-\nu)} \left(\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\vartheta_r}{r} \right)^2 + \frac{k\varepsilon(r)}{1+\nu} \left[\left(\vartheta_r - \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\vartheta_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^3(r)}{12(1+\nu)} \left[\left(\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial \theta} - \frac{\vartheta_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} - \frac{\vartheta_\theta}{r} + \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta, \quad (4) \end{aligned}$$

где k — коэффициент распределения касательных напряжений по поперечному сечению пластины, определяемый из [4].

Работа действующей на пластину силы $q(r, \theta, t)$ определяется выражением

$$A = R^3 \int_{r_{\text{int}}}^{r_{\text{ext}}} \int_0^{2\pi} q(r, \theta, t) u r dr d\theta. \quad (5)$$

Подставляя (2), (4) и (5) в (1), получим вариационное уравнение, для которого с учётом (3) система уравнений Эйлера относительно u_m , ϑ_{r_m} , ϑ_{θ_m} будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} -\frac{m}{r} \vartheta_{\theta_m} - \frac{\vartheta_{r_m}}{r} - \frac{\partial \vartheta_{r_m}}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_m}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} u_m + \frac{1}{\varepsilon(r)} \frac{\partial \varepsilon(r)}{\partial r} \left(\frac{\partial u_m}{\partial r} - \vartheta_{r_m} \right) - \frac{2}{k(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = \frac{2(1+\nu)q}{Ek\varepsilon(r)}, \\ \frac{6k(1-\nu)}{\varepsilon^2(r)} \left(\vartheta_{r_m} - \frac{\partial u_m}{\partial r} \right) = \frac{3}{r} \frac{1}{\varepsilon(r)} \frac{\partial \varepsilon(r)}{\partial r} \left(\nu \vartheta_{r_m} + \nu m \vartheta_{\theta_m} + r \frac{\partial \vartheta_{r_m}}{\partial r} \right) - \frac{\vartheta_{r_m}}{r^2} + \\ + \frac{m(\nu-3)}{2r^2} \vartheta_{\theta_m} - \frac{m^2}{r^2} \frac{1-\nu}{2} \vartheta_{r_m} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{r_m}}{\partial r} + \frac{m}{r} \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial \vartheta_{\theta_m}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta_{r_m}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \vartheta_{r_m}}{\partial t^2}, \quad (6) \\ \frac{6k(1-\nu)}{\varepsilon^2(r)} \left(\vartheta_{\theta_m} + \frac{m}{r} u_m \right) = \frac{3(1-\nu)}{2} \frac{1}{\varepsilon(r)} \frac{\partial \varepsilon(r)}{\partial r} \left(-\frac{\vartheta_{\theta_m}}{r} - \frac{m}{r} \vartheta_{r_m} + \frac{\partial \vartheta_{\theta_m}}{\partial r} \right) - \frac{1-\nu}{2r^2} \vartheta_{\theta_m} + \\ + \frac{m(\nu-3)}{2r^2} \vartheta_{r_m} - \frac{m^2}{r^2} \vartheta_{\theta_m} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial \vartheta_{\theta_m}}{\partial r} - \frac{m(1+\nu)}{2r} \frac{\partial \vartheta_{r_m}}{\partial r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \vartheta_{\theta_m}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \vartheta_{\theta_m}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Уравнения (6) представляют собой дифференциальные уравнения равновесия (движений) пластины по модели II в безразмерных полярных координатах r и θ .

2. Результаты вычислений при импульсном нагружении пластин по моделям I и II. Рассмотрим частный случай, когда на внешнем контуре r_{ext} пластин по моделям I и II, жёстко заделанных на внутреннем r_{int} и свободных на внешнем r_{ext} контуре, на отрезке времени $[0, t_0]$

действует самоуравновешенная импульсная нагрузка $q_0 \sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right) \cos(m\theta)$ (q_0 — амплитудное значение нагрузки; t_0 — продолжительность импульсного воздействия).

Примем в расчётах для пластины по модели I следующие значения: $s = 4$, $r_1 = r_{\text{int}} = 0,3$, $r_2 = 0,475$, $r_3 = 0,65$, $r_4 = 0,825$, $r_5 = r_{\text{ext}} = 1$, $\varepsilon_1 = 0,8$, $\varepsilon_2 = 0,7$, $\varepsilon_3 = 0,6$, $\varepsilon_4 = 0,5$, $\nu = 0,3$, $k = 0,86$, $m = 3$.

Результаты вычислений в моменты времени $t = \frac{t_0}{2}$ и $t = t_0$ безразмерных поперечных перемещений u (отнесённых к $\frac{1-\nu^2}{E}$) точки (с координатами $r = r_{\text{ext}}$ и $\theta = 0$) срединной плоскости пластины по модели I при изменении числа j удерживаемых в рядах слагаемых от 3 до 10 показывают быструю сходимость (см. таблицу). В расчётах полагалось, что $q_0 = 1$, $t_0 = 2,5$.

Проверка сходимости результатов вычислений по модели I

j	3	4	5	6	7	8	9	10
$t = \frac{t_0}{2}$	3,129	3,135	3,244	3,245	3,248	3,315	3,317	3,319
$t = t_0$	5,281	5,280	5,293	5,293	5,293	5,299	5,300	5,299

Для пластины по модели II изменение толщины $\varepsilon(r)$ по радиусу принимается в виде интерполирующего полинома 3-ей степени, полученного для набора пластин из модели I:

$$\varepsilon(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3,$$

Рис. 2. Поперечные перемещения u для пластин по моделям I (—) и II (---)

где $a_0 = 1,02143$, $a_1 = -0,57143$, $a_2 = 1,10796 \cdot 10^{-14}$, $a_3 = -5,43783 \cdot 10^{-15}$.

Далее для приведённых выше условий закрепления пластины по модели II на внутреннем и внешнем контурах, действующей нагрузки и характера изменения толщины пластины по радиусу $\varepsilon(r)$ выполняется численное решение системы дифференциальных уравнений (6), и в итоге могут быть получены параметры нестационарных воздействий.

Построение и реализация решений для обеих расчётных моделей проводились в системе компьютерной математики Mathematica® 4.1 [5].

На рис. 2 приведено сравнение для пластин по моделям I (с реализацией алгоритма [2] для $j = 5$)

и II поперечных перемещений u , отнесённых к $\frac{1-\nu^2}{E}$, точек срединной плоскости на линии $\theta = 0$ по радиусу пластины r в момент времени $t_0 = 2,5$ (граничные условия и нагрузку см. выше). Максимальное расхождение между решениями по обоим моделям составляет 0,1 %.

Заключение. Численные значения, приведённые на рис. 2, и их оценка подтверждают достоверность результатов, полученных для обеих расчётных моделей.

Реализация известных алгоритмов (модель I) [2], а также построение и реализация новых алгоритмов (модель II) на основе уточнённых решений теории колебаний пластин (модель Тимошенко) позволяют расширить возможности анализа напряжённо-деформированного состояния элементов сооружений и машин в форме тел вращения, подверженных динамическим воздействиям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Кузнецов, Н. Д. Расчётные методы определения собственных частот элементов конструкций в форме тел вращения и близких к ним [Текст] / Н. Д. Кузнецов, Л. И. Фридман, М. Е. Колотников / В сб.: Проблемы машиностроения и надёжности машин. — М.: Наука, 1993. — № 3. — С. 98–106.
- Фридман, Л. И. Динамический расчёт круглых пластин переменной толщины при отказе от гипотезы Кирхгофа [Текст] / Л. И. Фридман / Вопросы проектирования и доводки авиационных газотурбинных двигателей: Межвузов. сб. научных. тр. — Куйбышев: КуАИ, 1977. — С. 122–130.
- Ильин, В. П. Численные методы решения задач строительной механики [Текст] / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. — Мн.: Высш. шк., 1990. — 349 с.
- Mindlin, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates [Text] / R. D. Mindlin // J. Appl. Mech. — 1951. — No. 3. — P. 31–38.
- Дьяконов, В. П. Mathematica 4 с пакетами расширений [Текст] / В. П. Дьяконов. — М.: Нолидж, 2000. — 608 с. — ISBN 5-89251-086-7.