Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Глущенко, А. С. Люлин, А. В. Мантуленко, А. Л. Сараев, Эффективные модули релаксации многокомпонентных изотропных вязкоупругих композиционных материалов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 165–166

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:32:56

УДК 539.3

В. С. Глущенков, А. С. Люлин, А. В. Мантуленко, А. Л. Сараев

ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ РЕЛАКСАЦИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Моделируются макроскопические (эффективные) модули релаксации многокомпонентных изотропных вязкоупругих композиционных материалов типа «матрица — шаровые включения», компоненты которых проявляют наследственные свойства.

Рассмотрим многокомпонентный композиционный материал, первый компонент которого является матрицей, а другие — отдельными хаотически распределёнными в матрице включениями различных материалов, имеющих форму эллипсоидов с главными полуосями $a_1^{(s)}$, $a_2^{(s)}$, $a_3^{(s)}$. Здесь индекс s обозначает материал включения ($s = 1, 2, \dots, n$).

Запишем локальные уравнения деформирования изотропных компонентов композиционного материала:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}^{m;s}(t) \varepsilon_{kl}, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где модули релаксации матрицы и включений в общем случае имеют следующий вид:

$$E_{ijkl}^{m;s}(t) = 3K^{m;s}(t)V_{ijkl} + 2\mu^{m;s}(t)D_{ijkl}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Здесь m — индекс материала матрицы; $\mu^{m;s}(t)$, $K^{m;s}(t)$ — сдвиговые и объёмные модули релаксации; $D_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl})$, $V_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$ — девиаторные и объёмные составляющие единичного тензора I_{ijkl} ; σ_{ij} , ε_{kl} — тензоры напряжений и деформаций; δ_{ij} — символ Кронекера; t — время.

Эффективный модуль релаксации рассматриваемого композиционного материала

$$E_{ijkl}^*(t) = 3K^*(t)V_{ijkl} + 2\mu^*(t)D_{ijkl} \quad (3)$$

определяет связь между макроскопическими (средними по ансамблю случайно распределённых в матрице композиционного материала включений) напряжениями и деформациями, обозначенными угловыми скобками. Для объёмных и сдвиговых модулей релаксации:

$$\langle s_{ij}(t) \rangle = \int_0^t \mu^*(t-\theta) d\langle e_{ij}(\theta) \rangle, \quad \langle \sigma_{kk}(t) \rangle = \int_0^t K^*(t-\theta) d\langle \varepsilon_{kk}(\theta) \rangle. \quad (4)$$

Здесь звёздочкой обозначены эффективные величины; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\sigma_{kk}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}$ — девиаторные части тензоров напряжений и деформаций.

В случае, когда компоненты композиционного материала идеально упругие (не проявляют наследственных свойств) $K^{m;s}(t) = K^{m;s} = \text{const}$, $\mu^{m;s}(t) = \mu^{m;s} = \text{const}$, в [1] получено выражение для эффективного тензора модулей упругости, связывающего макроскопические напряжения с макроскопическими деформациями:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = E_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad E_{ijkl}^* = 2\mu^m I_{ijkl} + \lambda^m \delta_{ij} \delta_{kl} + a_{ijkl}, \quad (5)$$

где $a_{ijkl} = \left(c_m I_{ijmr} + \sum_{s=1}^n K_{ijmr}^{(s)} \right)^{-1} \sum_{s=1}^n (2[\mu^s] + \delta_{kl}[\lambda^s]) K_{mrkl}^{(s)}$; $K_{ijkl}^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_s} c_{s,\alpha} Q_{ijkl}^{(s,\alpha)}$; $Q_{ijkl}^{(s,\alpha)} = \left(I_{ijkl} + P_{ijkl}^{(s,\alpha)} \right)^{-1}$; $P_{ijkl}^{(s,\alpha)} = \frac{1}{2\mu^{m;s} + \delta_{kl}\lambda^m} (2[\mu^s] S_{ijkl}^{(s,\alpha)} + \delta_{kl}[\lambda^s] S_{ijpp}^{(s,\alpha)})$; $S_{ijkl}^{(s,\alpha)}$ — тензор Эшелби, записанный в лабораторной системе координат эллипсоидов пространственного направления α включения s ($\alpha = 1, 2, \dots, \alpha_s$); $\lambda^{m;s} = K^{m;s} - \frac{2}{3}\mu^{m;s}$ — постоянные Ламе; $c_{s,\alpha}$, c_s , c_m — объёмные концентрации, квадратными скобками обозначены разности величин: $[F^s] = F^s - F^m$.

Анизотропия тензора E_{ijkl}^* является следствием анизотропии тензора Эшелби и ориентации эллипсоидальных включений.

Если эллипсоидальные включения ориентированы равновероятно в объёме матрицы, то тензоры $K_{ijkl}^{(s)}$ будут изотропными:

$$K_{ijkl}^{(s)} = c_s (\gamma_s V_{ijkl} + \alpha_s D_{ijkl}). \quad (6)$$

В этом случае эффективные константы вычисляются следующим образом:

$$\mu^* = \mu^m + \frac{\sum_{s=1}^n [\mu^s] c_s \alpha_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \alpha_s}, \quad K^* = K^m + \frac{\sum_{s=1}^n [K^s] c_s \gamma_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \gamma_s}. \quad (7)$$

В общем случае инварианты тензоров $K_{ijkl}^{(s)}$ матричного композиционного материала выражаются через компоненты тензора Эшелби эллипсоидальных включений. В случае композиционного материала с шаровыми включениями различных материалов эти выражения представлены в [2]:

$$\alpha_s = \frac{1}{1 + \frac{2}{15} \frac{4-5\nu_m}{1-\nu_m} \frac{[\mu^s]}{\mu^m}}, \quad \gamma_s = \frac{1}{1 + \frac{1+\nu_m}{3(1-\nu_m)} \frac{[K^s]}{K^m}}. \quad (8)$$

Здесь $\nu_m = \frac{3K^m - 2\mu^m}{2(3K^m + \mu^m)}$ — коэффициент Пуассона.

При $n=1$ соотношения (7), (8) сводится к формулам, полученным в [3] для двухкомпонентного композиционного материала.

Для нахождения эффективных модулей $\mu^*(t)$, $K^*(t)$ используем принцип соответствия упругой и вязкоупругой задач: в правую часть известного решения упругой задачи (7), (8) подставим вместо $\mu^{m;s}$, $K^{m;s}$ величины $\overline{p\mu^{m;s}(p)}$, $\overline{pK^{m;s}(p)}$ соответственно. Здесь p — параметр преобразования Лапласа, чертой сверху отмечены трансформанты модулей релаксации в пространстве изображений. Получим в пространстве изображений трансформанты $\overline{p\mu^*(p)}$, $\overline{pK^*(p)}$. Применяя к этим соотношениям операцию обращения при помощи стандартных аналитических методов, окончательно найдём $\mu^*(t)$ и $K^*(t)$.

Модули релаксации компонентов композиционного материала, обладающих наследственными свойствами, будем рассматривать в виде конечных сумм экспоненциальных функций:

$$\mu^{m;s}(t) = \sum_{n=1}^N A_n^{m;s} \exp(-\lambda_n^{m;s} t), \quad K^{m;s}(t) = \sum_{n=1}^N D_n^{m;s} \exp(-r_n^{m;s} t). \quad (9)$$

Постоянные $A_n^{m;s}$, $D_n^{m;s}$, $\lambda_n^{m;s}$, $r_n^{m;s}$ определяются аппроксимацией соответствующих экспериментальных кривых релаксации компонентов композиционного материала.

При переходе в пространство изображений с помощью преобразования Лапласа, модули релаксации (9) записываются в таком виде:

$$\overline{\mu^{m;s}(p)} = \sum_{n=1}^N \frac{A_n^{m;s}}{\lambda_n^{m;s} + p}, \quad \overline{K^{m;s}(p)} = \sum_{n=1}^N \frac{D_n^{m;s}}{r_n^{m;s} + p}. \quad (10)$$

Для компонентов композиционного материала, не обладающих наследственными свойствами $\overline{K^{m;s}(p)} = K^{m;s} = \text{const}$, $\overline{\mu^{m;s}(p)} = \mu^{m;s} = \text{const}$.

Таким образом, показано, что эффективные модули релаксации многокомпонентных вязкоупругих композиционных материалов восстанавливаются по известному принципу соответствия упругой и вязкоупругой задач для текстурированных композиционных материалов с помощью соотношений (5) и для хаотически армированных композиционных материалов с помощью соотношений (7), (8) в аналитическом виде.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сараев, Л. А. Неупругие свойства многокомпонентных композитов со случайной структурой [Текст] / Л. А. Сараев, В. С. Глуценков. — Самара: Сам. ун-т, 2004. — 164 с. — ISBN 5-86465-285-7.
2. Глуценков, В. С. Эффективные упругие постоянные многокомпонентных композиционных материалов [Текст] / В. С. Глуценков / Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. третьей Всерос. научн. конф. (1-3 июня 2006, Самара). — Самара: СамГТУ, 2006. — Ч. 1: «Мат. модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций». — С. 46-47. — ISBN 5-7964-0798-8.
3. Левин, В. М. К определению упругих и термоупругих постоянных композиционных материалов [Текст] / В. М. Левин // Изв. АН СССР. МТТ. — 1976. — № 4. — С. 137-145.