Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Усс, О краевых задачах для четырехмерных аналогов системы Коши–Римана с комплексными коэффициентами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 10–16

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu55>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:15:36

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ АНАЛОГОВ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Проведена гомотопическая классификация эллиптических систем двух дифференциальных уравнений первого порядка с комплексными коэффициентами, являющихся обобщением на четырехмерный случай известной системы Коши-Римана. Доказывается, что системы указанного типа не имеют ни одной регуляризуемой краевой задачи ни в какой ограниченной области в R^4 .

Одним из способов построения аналога голоморфных функций комплексной переменной в многомерном случае является обобщение условий Коши-Римана. На сегодняшний день известно много таких обобщений (см. [1-4] и имеющиеся там ссылки), и они эффективно используются в теории краевых задач для систем дифференциальных уравнений, например, [5 - 7]. В настоящей работе вводится класс систем дифференциальных уравнений, содержащий не изучавшиеся ранее аналоги систем Коши-Римана в четырехмерном пространстве, исследуется топологическое строение этого класса и возможность постановки нетеровых краевых задач для его представителей.

В R^4 рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^4 A_j \frac{\partial U}{\partial x^j} = 0, \quad (1)$$

где A_j ($j = 1, 2, 3, 4$) – постоянные комплексные матрицы размера 2×2 , $U = (u, v)^T$ – искомый вектор-столбец из комплекснозначных функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$; $x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \nabla^4$. Следуя [8] (с. 258), назовем систему (1) четырехмерным аналогом системы Коши-Римана (сокращенно, ЧКР-системой), если компоненты u и v каждого ее решения U являются (комплексными) гармоническими функциями.

Анализ рассуждений, проведенных в [3] для систем дифференциальных уравнений первого порядка в ∇^n с действительными коэффициентами, показывает их применимость и в случае комплексных коэффициентов. Поэтому заключаем, что каждая ЧКР-система эллиптика, и произвольная система вида (1) является ЧКР в том и только в том случае, когда матрицы A_j ($j = 1, 2, 3, 4$) обратимы и удовлетворяют равенствам

$$A_j^{-1} A_k + A_k^{-1} A_j = 2d_{jk} E \quad (j, k = 1, 2, 3, 4), \quad (2)$$

где d_{jk} – символ Кронекера, а E – единичная матрица второго порядка.

Умножением, в случае необходимости, эллиптической системы (1) на матрицу A_1^{-1} и переобозначением матричных коэффициентов в получающейся при этом системе можно добиться того, что матрица A_1 в системе (1) будет единичной. Поэтому впредь будем предполагать, если не оговорено противное, что в ЧКР-системе (1) $A_1 = E$.

Пусть система (1) является ЧКР. Тогда из равенств (2) и равенства $A_1 = E$ следует, что матрицы A_2, A_3 и A_4 обладают свойством:

$$A_j + A_j^{-1} = 0 \quad (j = 2, 3, 4).$$

Из этих равенств заключаем, что $\det A_j = \pm 1$ ($j = 2, 3, 4$).

Покажем, что ни одно из равенств $\det A_j = -1$ ($j = 2, 3, 4$) не может иметь места. Убедимся в этом на примере матрицы A_2 , для остальных матриц рассуждения проводятся аналогично.

Предположим, что $\det A_2 = -1$. Тогда из равенства $A_2 + A_2^{-1} = 0$ следует, что матрица A_2 необходимо должна совпадать с одной из матриц

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Далее, определитель матрицы A_3 равен либо 1, либо -1. Но -1 он равняться не может, так как в противном случае матрица A_3 также должна находиться среди матриц (3), а для матриц этого

вида равенство $A_2^{-1}A_3 + A_3^{-1}A_2 = 0$ не выполняется. Значит, $\det A_3 = -1$. Отсюда, а также из равенства $A_3 + A_3^{-1} = 0$ следует, что

$$A_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

где комплексные числа a , b и c – таковы, что $a^2 + bc = -1$. Это, вместе с соотношением $A_2^{-1}A_3 + A_3^{-1}A_2 = 0$, приводит нас к равенству

$$\begin{pmatrix} ia & ib \\ ic & -ia \end{pmatrix} = 0,$$

т. е. $A_3 = 0$, что противоречит обратимости матрицы A_3 .

Итак, равенство $\det A_j = -1$ не может иметь места, и, следовательно, $\det A_j = 1$ при $j = 2, 3, 4$.

Л е м м а. Пусть в ЧКР-системе (1) матрица A_1 – единичная. Тогда матрица A_2 подобна матрице

$$B_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

т.е. существует такая невырожденная матрица T второго порядка, что $B_2 = T A_2 T^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Жорданова нормальная форма над полем $\mathbb{C}$ произвольной квадратной матрицы второго порядка есть одна из матриц

$$\begin{pmatrix} I & 1 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 1 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},$$

где I , I_1 , I_2 – некоторые комплексные числа. С другой стороны, каждая матрица B , подобная матрице A_2 , должна удовлетворять равенству $B + B^{-1} = 0$. Поскольку последнему равенству из трех выписанных матриц может удовлетворять лишь диагональная матрица и лишь в случае, когда

$$I_1^2 = I_2^2 = -1,$$

а матрицы B_2 и $-B_2$ – подобны, то заключаем, что матрица A_2 подобна матрице B_2 . Лемма доказана.

Пусть теперь T – матрица, указанная в лемме. Тогда, умножая ЧКР-систему (1) на матрицу T и меняя в системе искомую функцию U на $V = TU$, мы приходим к ЧКР-системе

$$\sum_{j=1}^4 B_j \frac{\partial V}{\partial x^j} = 0, \quad (4)$$

в которой матрица B_1 – единичная, а B_2 – матрица, указанная в лемме. Поскольку система (4) имеет тип ЧКР, матрицы B_3 и B_4 не могут быть произвольными. Как показывает простой анализ соотношений (2), они необходимо должны иметь вид:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где b и c – ненулевые комплексные числа, связанные равенством $b^2 + c^2 = 0$. Таким образом, мы приходим к следующему заключению.

Т е о р е м а 1. Если (1) является ЧКР-системой, то существует число $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\mathfrak{R}$ – линейное невырожденное преобразование $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такие, что система (1) равносильна системе (4), в которой $V = TU$, матрица B_1 – единичная,

$$B_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

а матрица B_4 – одна из следующих двух:

$$\begin{pmatrix} 0 & ib \\ ib^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -ib \\ -ib^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

При каждом $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и матрицах (5), (6) система (4) является ЧКР-системой.

Проведем гомотопическую классификацию ЧКР-систем.

Назовем две ЧКР-системы вида (1) гомотопными, если они гомотопны в классе эллиптических систем двух дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными комплексными коэффициентами, причем гомотопирующее семейство, связывающее эти системы, можно выбрать таким образом, что каждый его элемент является ЧКР-системой.

Т е о р е м а 2. Множество ЧКР-систем имеет две компоненты гомотопической связности, и каждая ЧКР-система (1) гомотопна системе, характеристическая матрица которой есть одна из двух следующих:

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 \pm ix_4 \\ -x_3 \pm ix_4 & x_1 + ix_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что характеристическая матрица произвольной ЧКР-системы (1) в классе характеристических матриц ЧКР-систем может быть сгомотопирована к одной из матриц (7).

Пусть (1) – произвольная система типа ЧКР (равенство $A_1 = E$ не предполагается). Тогда характеристическую матрицу этой системы, обозначим ее $A(x)$, можно представить в виде:

$$A(x) = A_1 (Ex_1 + A_1^{-1} A_2 x_2 + A_1^{-1} A_3 x_3 + A_1^{-1} A_4 x_4).$$

Согласно доказанной выше лемме существует такая невырожденная матрица второго порядка T , что $TA_1^{-1}A_2T^{-1} = B_2$, где B_2 – первая из матриц (5). Следовательно,

$$A(x) = A_1 T^{-1} (Ex_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4 x_4) T,$$

где при некотором $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ матрицы B_2 и B_3 задаются равенствами (5), а B_4 – одна из матриц (6). Матрицы A_1 и T – невырожденные и, в силу связности группы комплексных невырожденных матриц (см., например, [9], с.28 и 56), гомотопны единичной матрице E . Обозначим через $A_1(t)$ и $T(t)$, $0 \leq t \leq 1$, пути в группе указанных матриц с началами, соответственно, в A_1 и в T и с концами в E , и положим:

$$b(t) = (t + (1-t)|b|) \exp\{i(1-t) \arg b\},$$

$$B_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ -b^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_4(t) = \begin{pmatrix} 0 & ib(t) \\ ib^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix}, \text{ если } B_4 \text{ – первая из матриц (6), и}$$

$$B_4(t) = \begin{pmatrix} 0 & -ib(t) \\ -ib^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix}, \text{ если } B_4 \text{ – вторая из матриц (6).}$$

Тогда гомотопия

$$A(t, x) = A_1(t) (T(t))^{-1} (Ex_1 + B_2 x_2 + B_3(t) x_3 + B_4(t) x_4) T(t),$$

$0 \leq t \leq 1$, связывает матрицу $A(x)$ с одной из матриц (7). При этом, очевидно, при каждом $t \in [0; 1]$ матрица $A(t, x)$ является характеристической матрицей некоторой ЧКР-системы.

Докажем теперь негомотопность матриц

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 + ix_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 - ix_4 \\ -x_3 - ix_4 & x_1 + ix_2 \end{pmatrix}.$$

на множестве полиномиальных матриц, невырожденных при $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{V}^4 \setminus \{0\}$.

Предположим противное, т.е. предположим, что выписанные матрицы гомотопны на указанном множестве. Тогда гомотопными будут и векторные поля $l_1, l_2 : S^3 \rightarrow S^3$, определяемые

на единичной сфере $S^3 := \{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \}$ первыми строками этих матриц:

$$l_1(x) = x, \quad l_2(x) = (x_1, x_2, x_3, -x_4).$$

Следовательно, должны совпадать (см. [10], с. 429) степени отображений l_1 и l_2 . Но для первого отображения степень равна единице, а для второго – минус единице. Противоречие.

Таким образом, каждая ЧКР-система (1) может быть сгомотопирована в классе ЧКР-систем к одной из двух негомотопных между собой систем, описываемых характеристическими матрицами (7). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Гомотопическая классификация общих эллиптических систем двух дифференциальных уравнений вида (1) ранее проведена В.И. Шевченко [11] (см. также [12]), и, как показывает сравнение результатов [11] с утверждением теоремы 2, рассмотренное здесь сужение класса систем дифференциальных уравнений, а также сужение класса допустимых гомотопий не изменяет число компонент гомотопической связности.

З а м е ч а н и е 2. Рассуждения, проведенные в доказательстве теоремы 2, показывают, что степень отображения $r: S^3 \rightarrow \nabla^4 \setminus \{0\}$, задаваемого первой строкой характеристической матрицы

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ a_3(x) & a_4(x) \end{pmatrix}$$

системы (1) равенством

$$r(x) = (\operatorname{Re} a_1(x), \operatorname{Im} a_1(x), \operatorname{Re} a_2(x), \operatorname{Im} a_2(x)), \quad x \in S^3,$$

является инвариантом, различающим компоненты связности множества всех ЧКР-систем и, более того, множества всех эллиптических систем двух дифференциальных уравнений первого порядка с комплексными коэффициентами в $\mathbb{R}^4$. Поскольку же $a_1(x)$ и $a_2(x)$ – линейные формы относительно переменных $x_1, \dots, x_4$, то отображение r есть сужение на S^3 линейного невырожденного (в силу эллиптичности системы (1)) отображения из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$, а потому его степень равна знаку определителя последнего отображения (см., например, теорему 6.1 в [13], с. 24). Таким образом, мы получаем простой алгебраический признак различия компонент гомотопической связности указанных выше множеств систем дифференциальных уравнений (ср. с [12]): две системы вида (1) гомотопны тогда и только тогда, когда имеют одинаковые знаки определители линейных отображений, построенных описанным способом по характеристическим матрицам этих систем.

Перейдем к рассмотрению краевых задач для ЧКР-систем. Без ограничения общности будем предполагать, что ЧКР-система (1) имеет канонический вид (4), а именно, $A_1 = B_1 = E$, матрицы $A_2 = B_2$ и $A_3 = B_3$ определяются равенствами (5), а $A_4 = B_4$ – первая из матриц (6) (случай второй матрицы из (6) сводится к рассматриваемому простой заменой переменных в ∇^4). Пусть, далее, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^4$, границей которой является бесконечно гладкое трехмерное многообразие $\partial\Omega$.

Комплексное граничное условие на $\partial\Omega$ для решения $U = (u, v)^T$ системы (1), рассматриваемой в области Ω , не приводит к краевой задаче самого общего вида, поскольку порядки действительной или мнимой частей комплексного оператора в общем случае не обязаны совпадать с порядком самого оператора. Постановка же действительных граничных условий для решений системы (1) делает целесообразной замену системы (1) на эквивалентную ей систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами. Условимся в дальнейшем обозначать через U вектор-столбец $(u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, составленный из действительных и мнимых частей компонент решения U исходной системы (1): $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$, $u_3 = \operatorname{Re} v$, $u_4 = \operatorname{Im} v$. Тогда овеществленный вариант ЧКР-системы (1) канонического вида можно записать в том же виде (1), только теперь уже матрица A_1 будет единичной матрицей четвертого порядка, и

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 & -b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 \\ -kb_1 & -kb_2 & 0 & 0 \\ kb_2 & -kb_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & b_1 & -b_2 \\ kb_2 & -kb_1 & 0 & 0 \\ kb_1 & kb_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь $b_1 = \operatorname{Re} b$, $b_2 = \operatorname{Im} b$ и $k = (b_1^2 + b_2^2)^{-1}$, где b – число, входящее в матрицы (5), (6).

Итак, рассмотрим краевую задачу отыскания решения $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений

$$A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) U := \sum_{j=1}^4 A_j \frac{\partial U}{\partial x^j} = f(x), \quad x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \Omega, \quad (9)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$B \left(y, \frac{\partial}{\partial x} \right) \Big|_{\Omega \ni x \rightarrow y} U = g(y), \quad y \in \partial\Omega. \quad (10)$$

Здесь $A_1 = E_4$ – единичная матрица четвертого порядка, а матрицы A_2 , A_3 и A_4 задаются равенствами (8), в которых b_1 и b_2 – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию $b_1^2 + b_2^2 > 0$, и $k = (b_1^2 + b_2^2)^{-1}$; f и g – заданные соответственно четырех- и двух-компонентный вектор-столбцы, состоящие из действительных функций; $B|$ – матричный, размера 2×4 , граничный оператор, состоящий из скалярных линейных операторов, «полиномиальных относительно нормали» к $\partial\Omega$ [14].

Краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я.Б. Лопатинского [15]. Известно [14, 16], что регуляризуемость краевой задачи есть необходимое и достаточное условие нетеровости оператора, отвечающего этой задаче и действующего в определенных банаховых пространствах.

Т е о р е м а 3. *Краевая задача (9), (10) не является регуляризуемой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно установить невыполненность условия Лопатинского для краевой задачи в полупространстве $R_+^4 := \{x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{V}^4 \mid x^1 > 0\}$, получаемой из задачи (9), (10) «замораживанием коэффициентов» в той точке многообразия $\partial\Omega$, в которой нормаль к $\partial\Omega$ параллельна вектору $(1, 0, 0, 0)$. Поэтому при доказательстве теоремы можно считать, что $\Omega = R_+^4$ и символ главной части граничного оператора $B|_{x^1=0}$ не зависит от точки $y \in \partial\Omega$. Далее, поскольку система (9) позволяет выразить $\frac{\partial U}{\partial x^1}$ через частные производные от U по другим переменным, без ограничения общности можно предполагать, что граничные условия (10) не содержат дифференцирования по x^1 . Пусть

$$A(I, t) = A_1 I + A_2 t_1 + A_3 t_2 + A_4 t_3$$

есть характеристическая матрица системы (9), а $B(t)$ – символ главной части оператора $B \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Big|_{x^1=0}$. Тогда для доказательства теоремы нам остается доказать, что существует ненулевой набор $t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{V}^3 \setminus \{0\}$, при котором ранг матрицы

$$(2pi)^{-1} B(t) \cdot \int_{\gamma} A^{-1}(I, t) dI \quad (11)$$

строго меньше двух (здесь γ – простой гладкий замкнутый контур, лежащий в верхней I – полуплоскости и охватывающий все находящиеся в ней I – корни уравнения $\det A(I, t) = 0$).

Матрица $B(t)$ представляет собой 2×4 -матрицу, элементами которой являются действительнозначные непрерывные однородные функции переменных t_1, t_2, t_3 . Будем предполагать, что ее ранг равен двум при каждом $t \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, поскольку в противном случае ранг матрицы (11) заведомо меньше двух хотя бы при одном $t \neq 0$. Обозначим через L_{jk} и H_{jk} ($j, k = 1, 2, 3, 4$) миноры второго порядка, составленные из j -ых и k -ых столбцов соответственно матрицы $B(t)$ и матрицы (11), и положим:

$$L_1 := -L_{12} + kL_{34}, L_2 := L_{13} + L_{24}, L_3 := L_{14} - L_{23}, b_1 := -b_1 t_2 + b_2 t_3, b_2 := b_2 t_2 + b_1 t_3.$$

Тогда непосредственным вычислением миноров H_{jk} ($1 \leq j < k \leq 4$) матрицы (11) получим, что в каждой точке $t = (t_1, t_2, t_3)$ единичной сферы $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

$$H_{12} = (1 - t_1^2) L_1 - k t_1 b_1 L_2 - k t_1 b_2 L_3 + ik (b_2 L_2 - b_1 L_3),$$

$$\begin{aligned}
H_{13} &= t_1(b_1 L_1 - t_2 L_2) - k b_2(b_2 L_2 - b_1 L_3) + i(b_2 L_1 - t_1 L_3), \\
H_{14} &= t_1(b_2 L_1 - t_2 L_3) + k b_1(b_2 L_2 - b_1 L_3) - i(b_1 L_1 - t_1 L_2), \\
H_{23} &= -H_{14}, \quad H_{24} = H_{13}, \quad H_{34} = -k^{-1} H_{12}.
\end{aligned}$$

Зададим непрерывное отображение $j : S^2 \rightarrow S^2$ равенством

$$j(t) = (t_1, -b_1 t_2 + b_2 t_3, b_2 t_2 + b_1 t_3) / l(t_1), \quad t = (t_1, t_2, t_3) \in S^2,$$

где $l(t_1) = (t_1^2 + (b_1^2 + b_2^2)(1 - t_1^2))^{1/2}$. Поскольку, как нетрудно убедиться, система уравнений относительно t_1, t_2, t_3

$$x_1 = t_1 / l(t_1), \quad x_2 = (-b_1 t_2 + b_2 t_3) / l(t_1), \quad x_3 = (b_2 t_2 + b_1 t_3) / l(t_1)$$

однозначно разрешима при каждом $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ и решение ее

$$t_1 = x_1 m(x_1), \quad t_2 = (-b_1 x_2 + b_2 x_3) k m(x_1), \quad t_3 = (b_2 x_2 + b_1 x_3) k m(x_1),$$

где $m(x_1) = ((b_1^2 + b_2^2) / (1 - x_1^2 + (b_1^2 + b_2^2)x_1^2))^{1/2}$, образует точку $t = (t_1, t_2, t_3)$, принадлежащую сфере S^2 , то заключаем, что отображение j является гомеоморфизмом сферы S^2 на себя.

Так как ранг матрицы $B(t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ равен двум, то в каждой точке $t \in S^2$ определен ненулевой вектор $L(t) = (L_1, L_2, L_3)$. Значит, на двумерной сфере S^2 определено непрерывное невырождающееся векторное поле Lj^{-1} . Согласно теореме «о еже» (см., например, [10], с. 584) на сфере S^2 найдется точка $V \in S^2$ такая, что

$$(Lj^{-1})(V) = aV,$$

где a – некоторое действительное число. Последнее равенство показывает, что в точке $t = j^{-1}(V) \in S^2$ имеют место равенства:

$$L_1 = a t_1 / l(t_1), \quad L_2 = a(-b_1 t_2 + b_2 t_3) / l(t_1), \quad L_3 = a(b_2 t_2 + b_1 t_3) / l(t_1).$$

Подставляя найденные выражения для L_1, L_2 и L_3 в указанные выше миноры матрицы (11), получим, что в точке $t = j^{-1}(V) \in S^2$

$$H_{12} = H_{13} = H_{14} = H_{23} = H_{24} = H_{34} = 0.$$

Таким образом, в точке $t = j^{-1}(V) \in S^2$ ранг матрицы (11) строго меньше двух. Теорема доказана.

Из теоремы 3 непосредственно выводим

С л е д с т в и е. Для ЧКР-системы (1), рассматриваемой в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{V}^4$, нет псевдодифференциальных граничных условий, «полиномиальных относительно нормали», образующих с этой системой регуляризуемую краевую задачу.

З а м е ч а н и е 3. Для частного случая ЧКР-системы (1), а именно, в случае, когда характеристическая матрица системы (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 - ix_4 \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

отсутствие регуляризуемых краевых задач с граничными условиями «полиномиального типа относительно нормали» ранее установлено М.З. Соломяком [17]. Известен также результат В.С. Виноградова [18], что любая краевая задача типа задачи Римана-Гильберта не может быть нетеровской, если она ставится для эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами в $\mathbb{R}^4$, имеющей псевдосимметрический тип. Последний тип имеют, например, системы (9), если числа b_1 и b_2 таковы, что $b_1^2 + b_2^2 = 1$. Таким образом, теорема 3 обобщает результат В.С. Виноградова.

З а м е ч а н и е 4. Можно показать, хотя мы и не будем здесь останавливаться на этом, что добавление по методу Вишика-Эскина-Диканского (см., например, [19]) в граничные условия как для ЧКР-системы (1), так и для системы (9) любого конечного числа потенциалов с неизвестными плотностями по-прежнему не дает регуляризуемую краевую задачу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Саак Э.М. К теории многомерных эллиптических систем первого порядка // Доклады АН СССР, 1975. Т. 222, № 1. С. 43-46.
2. Шевченко В.И. О задаче Гильберта для голоморфного вектора в многомерном пространстве // Дифференциальные и интегральные уравнения. Краевые задачи. Тбилиси, 1979. С.279-291.
3. Жадан М.И., Усс А.Т., Ющенко Д.П. Регуляризуемость краевых задач для одного класса многомерных аналогов системы Коши-Римана / Гомельск. гос. ун-т. Гомель, 1987. 17 с. Деп. в ВИНТИ 01.04.87. № 2366-B87.
4. Балабаев В.Е. Нормальные эллиптические системы первого порядка // Дифференциальные уравнения, 1995. Т. 31, № 1. С. 48-51.
5. Виноградов В.С. Об аналоге интеграла типа Коши для аналитических функций многих комплексных переменных // Доклады АН СССР, 1968. Т. 178, № 2. С. 282-285.
6. Виноградов В.С. О задаче Дирихле для многомерных эллиптических систем второго порядка // Доклады АН СССР, 1968. Т. 179, № 4. С. 766-767.
7. Янушаускас А.И. О некоторых системах с частными производными, связанных с многомерными аналогами системы Коши-Римана // Дифференциальные уравнения и их применения. Вильнюс, 1980. Вып. 27. С. 115-139.
8. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 336 с.
9. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: ГИИТЛ, 1948. 316 с.
10. Александров П.С. Комбинаторная топология. М.-Л.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1947. 660 с.
11. Шевченко В.И. О гомотопической классификации многомерных эллиптических систем с комплексными коэффициентами // Доклады АН БССР, 1978. Т. 22, № 8. С. 681-683.
12. Самойленко И.С. Гомотопическая классификация систем двух псевдодифференциальных уравнений первого порядка и краевые задачи // Краевые задачи для уравнений в частных производных: Сборн. научн. трудов. Киев, 1978. С. 96-107.
13. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.
14. Агранович М.С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы // Успехи математических наук, 1965. Т. 20, вып. 5. С. 3-120.
15. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Украинский математический журнал, 1953. Т. 5, № 2. С. 123-151.
16. Волевич Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Математический сборник, 1965. Т. 68, № 3. С. 373-416.
17. Соломяк М.З. О линейных эллиптических системах первого порядка // Доклады АН СССР, 1963. Т. 150, № 1. С. 48-51.
18. Виноградов В.С. Граничная задача для псевдосимметрических систем // Дифференциальные уравнения, 1985. Т. 21, № 1. С. 161-163.
19. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.