Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Просвиряков, В. В. Стружанов, Об устойчивости равновесия систем автоматического управления градиентного типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 173–176

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu552>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:58:07

УДК 519.9

Е. Ю. Просвиряков, В. В. Стружанов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА

Рассмотрены две системы автоматического управления градиентного типа, в которых параметры управления и состояния связаны некоторой потенциальной функцией. Предложены критерии потери устойчивости равновесия систем, а именно критерий, использующий дискриминантный конус потенциальной функции и критерий, опирающийся на определение устойчивости по Ляпунову.

1. Введение. Непрерывные системы автоматического управления описываются динамическими моделями вида $\frac{d\psi_i}{dt} = f_i(\psi_j, c_\alpha, t)$, где ψ_i — параметры состояния, c_α — параметры управления [1]. Если функции f_i явно не зависят от времени, то получаем, так называемую, автономную динамическую систему. Функции f_i во многом аналогичны компонентам силы в классической механике. Существенное упрощение возможно тогда, когда сила является консервативной. В этом случае все функции f_i могут быть заданы градиентом (по отношению к ψ_j) некоторой потенциальной функции $V(\psi_j, c_\alpha)$. В результате получаем систему уравнений, которую называют градиентной ($\frac{d\psi_i}{dt} = \nabla_{\psi} V$). Особый интерес представляет изучение состояния равновесия ($\frac{d\psi_i}{dt} = 0$) градиентных динамических систем, которое описывается системой уравнений $\frac{\partial V}{\partial \psi_j} = 0$. В этом случае возникает задача о том, каким образом состояния равновесия $\psi_j(c_\alpha)$ потенциальной функции $V(\psi_j, c_\alpha)$ изменяются при изменении управляющих параметров.

Многие задачи механики деформируемых систем могут быть описаны в терминах теории автоматического управления. Действительно, в них существует объект управления (элемент конструкции) и система управления (передающие нагрузку тела). Роль параметров управления играют внешние силы или задаваемые перемещения на границах системы, а роль параметров состояния играют внутренние перемещения или деформации.

В настоящей работе рассматривается задача об исследовании положений равновесия механической системы, реализующей квазистатическое растяжение с кручением цилиндрического элемента конструкции. Задача сформулирована в терминах теории автоматического управления.

2. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из полого цилиндрического элемента конструкции, к обоим концам которого присоединены упругие стержни, передающие нагрузку. К свободным концам стержней (по-отдельности) прикладываем растягивающую силу p_1 и крутящий момент p_2 , либо соответственно задаём перемещение u_1 и угол закручивания u_2 . При этом в полом цилиндре возникают растягивающее напряжение τ_1 и деформация x_1 , а также касательные напряжения τ_2 и сдвиг x_2 .

Данную механическую систему в зависимости от способа нагружения можно представить двумя типами систем автоматического управления. Первая система состоит из пяти элементов (см. рисунок).

На вход системы подаются сигналы p_1, p_2 , а на выходе генерируются сигналы τ_1, τ_2 . Сначала сигналы p_1, p_2 преобразуются соответственно элементами

5 и 4 в сигналы u_1, u_2 , поступающие затем в элементы 1 и 2 соответственно. Элементы 1 и 2 вырабатывают сигналы x_1, x_2 , поступающие в элемент 3. Элемент 3, используя сигналы x_1, x_2 по известным (заданным), вообще говоря, нелинейным зависимостям $\tau_1 = \tau_1(x_1, x_2)$, $\tau_2 = \tau_2(x_1, x_2)$ вырабатывает сигналы τ_1, τ_2 . Отметим, что все сигналы — положительные величины; $x_1, x_2, u_1, u_2, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^1$; функции τ_1 и τ_2 являются отображениями $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Входные сигналы p_1, p_2 действуют непрерывно в течение всего времени работы системы. При этом они изменяются столь медленно, что динамическими эффектами в системе можно пренебречь. Сигналы p_1, p_2 будем называть параметрами управления, а сигналы x_1, x_2, u_1, u_2 — параметрами состояния данной системы автоматического управления.

Взаимосвязь между сигналами в системе в положении равновесия определяется следующим образом. Во-первых, выходные сигналы должны равняться входным, а именно $p_1 = \tau_1$, $p_2 = \tau_2$. Во-вторых, при преобразовании сигналов u_1 и u_2 элементами 1, 2 в сигналы x_1, x_2 про-

исходят потери, равные $u_1 - x_1$, $u_2 - x_2$. Условием равновесия процесса выработки автоматической системой сигналов τ_1 и τ_2 является пропорциональность потерь величинам этих сигналов, а именно,

$$u_1 - x_1 = \frac{\tau_1}{\lambda_1}, \quad u_2 - x_2 = \frac{\tau_2}{\lambda_2}. \quad (1)$$

Следовательно, для генерации выходных сигналов большей величины необходимо увеличивать сигналы u_1 , u_2 , при этом возрастают потери. Здесь $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ — действительные числа, являющиеся характеристиками соответственно элементов 1 и 2 (жёсткости стержней, передающих нагрузку). Если, например, $\lambda_1 = 0$, то потери в элементе 1 бесконечно большие и сигнал τ_1 вообще не может быть сгенерирован. Если $\lambda_1 = \infty$, то потери равны нулю ($u_1 = x_1$). Аналогично и для параметра λ_2 .

Автоматическая система является градиентной, если существует потенциальная функция Π , зависящая от параметров состояния и управления, такая, что условие $\nabla \Pi = 0$ определяет равновесие процессов. Здесь ∇ — оператор Гамильтона в пространстве с размерностью, равной числу параметров состояния. С учётом равенства (1) должны иметь место следующие уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \tau_1 - \lambda_1(u_1 - x_1), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = \tau_2 - \lambda_2(u_2 - x_2). \quad (2)$$

Кроме того, учитывая равенства $p_1 = \tau_1$, $p_2 = \tau_2$, имеем ещё два уравнения, а именно,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = \lambda_1(u_1 - x_1) - p_1, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = \lambda_2(u_2 - x_2) - p_2. \quad (3)$$

Восстанавливая теперь потенциал, находим $\Pi = V + W$, где

$$V = \int_0^{x_1} \tau_1 dx_1 - \lambda_1 \int_0^{x_1} (u_1 - x_1) dx_1 + \int_0^{x_2} \tau_2 dx_2 - \lambda_2 \int_0^{x_2} (u_2 - x_2) dx_2 - \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} dx_1 dx_2,$$

$$W = \lambda_1 \int_0^{u_1} (u_1 - x_1) du_1 - p_1 u_1 - \lambda_2 \int_0^{u_2} (u_2 - x_2) du_2 - p_2 u_2.$$

Здесь $\frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1}$, а также учтено, что при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$ потенциал $\Pi = 0$. Таким образом, Π является двухпараметрической функцией параметров управления p_1, p_2 и четырёх параметров состояния.

Вторая система автоматического управления состоит только из трёх элементов (элементы 1, 2, 3). На вход подаются сигналы u_1 , u_2 , а на выходе получаем сигналы τ_1 , τ_2 . Здесь параметрами управления являются u_1 , u_2 , а параметрами состояния — x_1 , x_2 . Система градиентальна с потенциальной функцией V , которая является двухпараметрической функцией (параметры управления u_1 , u_2) от двух параметров состояния.

Теперь задача формулируется следующим образом. Необходимо исследовать на устойчивость по отношению к малым изменениям параметров управления равновесные состояния систем автоматического управления первого и второго типов, в которых параметры управления и состояния связаны уравнениями (2)–(3) (система первого типа) или уравнением (2) (система второго типа).

3. Дискриминантные конусы устойчивости. Уравнения (2)–(3) определяют так называемые критические точки функции Π , в которых первая система находится в равновесии (устойчивом или неустойчивом). Смена типа равновесия происходит в вырожденных критических точках, где обращается в нуль детерминант матрицы Гессе $H(\Pi)$ функции Π [1,2]. Вычисляя гессиан, находим, что в вырожденной критической точке должно выполняться равенство

$$\det H(\Pi) = \lambda_1 \lambda_2 (c_{11} c_{22} - c_{12}^2) = 0, \quad (4)$$

где $c_{11} = \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1}$, $c_{22} = \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2}$, $c_{12} = \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1}$.

В трёхмерном евклидовом пространстве с координатами c_{12} , c_{11} , c_{22} уравнение (4) определяет коническую поверхность (дискриминантный конус [2]). При близких к нулю значениях

сигналов p_1, p_2 элемент 3 вырабатывает сигналы, зависящие только от одной переменной, а именно, $\tau_1 = \tau_1(x_1)$, $\tau_2 = \tau_2(x_2)$. Тогда $c_{12} = 0$, $c_{11} > 0$, $c_{22} > 0$. (В механической системе это соответствует состоянию упругости всех элементов). В этом случае изображающая точка находится внутри конуса.

Используя критерий Сильвестра [3], нетрудно показать, что в критической точке функции Π , отвечающей данному положению изображающей точки, матрица Гессе $H(\Pi)$ является положительно определённой. Следовательно, функция Π является выпуклой вниз в этой критической точке и имеет локальный минимум [3]. Это означает, что положение равновесия устойчиво. Таким образом, если изображающая точка расположена внутри конуса, то система находится в устойчивом положении равновесия. Положение равновесия становится неустойчивым тогда, когда параметры управления таковы, что отвечающим им характеристикам c_{12} , c_{11} , c_{22} элемента 5 соответствует изображающая точка, расположенная на конической поверхности. Это условие устанавливает ограничение на величину входных сигналов.

Для второй системы матрица Гессе $H(V)$ имеется только четыре компонента. В вырожденной критической точке функции V должно выполняться равенство

$$\det H(V) = (c_{11} + \lambda_1)(c_{22} + \lambda_2) - c_{12}^2 = 0. \quad (5)$$

В определённом выше трёхмерном пространстве уравнение (5) определяет тот же дискриминантный конус, только вершина его расположена в точке с координатами $c_{12} = 0$, $c_{11} = -\lambda_1$, $c_{22} = -\lambda_2$. Дальнейший анализ аналогичен изложенному выше. Отметим только, что для второй системы область устойчивости расширяется в силу обозначенного расположения вершины дискриминантного конуса.

4. Устойчивость по Ляпунову. Пусть система автоматического управления первого типа находится в равновесном состоянии. Возмутим это равновесие, увеличив входные сигналы на произвольно малые величины. Используя уравнения (2)–(3), запишем уравнение возмущённого равновесия, применяя матричную форму записи. Имеем

$$d\tau - \Lambda(du - dx) = 0, \quad \Lambda(du - dx) - dp = 0. \quad (6)$$

Здесь $d\tau = \begin{pmatrix} d\tau_1 \\ d\tau_2 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $du = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix}$, $dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$, $dp = \begin{pmatrix} dp_1 \\ dp_2 \end{pmatrix}$, $d\tau_1 = c_{11}dx_1 + c_{12}dx_2$, $d\tau_2 = c_{12}dx_1 + c_{22}dx_2$, $d\tau = Cdx$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$. Из уравнений (6) следует, что

$$Cdx = dp. \quad (7)$$

Дадим теперь определение устойчивости системы управления в смысле Ляпунова [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Положение равновесия системы является *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|dp| < \delta$ следует неравенство $|dx| < \varepsilon$, где dx и dp связаны уравнением возмущенного равновесия (7).

Очевидно, что непрерывная зависимость dx от dp нарушается тогда, когда матрица C вырождена. В этом случае при возмущении равновесия системы произвольно малым увеличением входных сигналов dp получаем неограниченное возрастание приращения параметров состояния dx . Условие устойчивости по Ляпунову нарушается и рассматриваемое положение равновесия системы неустойчиво. Следовательно, система автоматического регулирования первого типа теряет устойчивость тогда, когда $\det C = 0$. Так как $\det C$ с точностью до положительного множителя равен $\det H(\Pi)$, то матрица C вырождается одновременно с матрицей $H(\Pi)$.

В случае, когда анализируется устойчивость системы управления второго типа, из уравнений (6) остаётся только первое, которое сводится к виду $(C + \Lambda)dx = \Lambda du$. Очевидно, что $C + \Lambda = H(V)$. Условие устойчивости по Ляпунову утверждает, что из неравенства $|du| < \delta$ должно следовать неравенство $|dx| < \varepsilon$. Отсюда система второго типа теряет устойчивость тогда, когда $\det(C + \Lambda) = \det H(V) = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 07–08–00125)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф [Текст]: В 2-х кн. / Р. Гилмор; пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — Кн. 1. — 350 с.

2. Постон, Т. Теория катастроф и её приложения [Текст] / Т. Постон, И. Стюарт; пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
3. Хорн, Р. Матричный анализ [Текст] / Р. Хорн, Ч. Джонсон; пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 355 с.
4. Барбашин, Е. А. Введение в теорию устойчивости [Текст] / Е. А. Барбашин. — М.: Наука, 1967. — 233 с.

Институт машиноведения Уральского отделения РАН, г. Екатеринбург
evgen_pros@mail.ru

Поступила 07.03.2007

УДК 001.891.57

М. В. Меньшов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ОСАЖДЕНИЯ ПОЛИДИСПЕРСНОГО АЭРОЗОЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕСЕЧЕННОГО РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ

Проанализированы результаты математического моделирования переноса аэрозольного образования в условиях пересеченного рельефа местности с использованием верифицированной математической модели. Получены результаты, позволяющие проводить предварительную качественную оценку результатов распространения примесей в приземном слое атмосферы и осадения их на подстилающей поверхности пересеченной местности.

В последние годы все более распространенным способом проведения авиационных работ в сельском хозяйстве становится способ ультрамалообъемного внесения рецептур с резко сниженными весовыми нормами, но обладающих несравнимо большей химической активностью, по сравнению с используемыми ранее веществами. Такого рода работы проводятся в условиях слабо- и среднепересеченной местности, в предположении сохранения динамики осадения аэрозольных образований, характерной для соответствующих процессов над равнинной местностью. Имеющиеся на практике негативные результаты (дальние выносы аэрозольного облака; наличие зон концентраций, превышающих допустимую, и пр.) списываются, как правило, на случайные порывы ветра или другие форсмажорные обстоятельства.

В данной работе анализируются результаты математического эксперимента, проведенного с помощью модели, подробно описанной в работе [1], где были представлены результаты её верификации в условиях блокирующей инверсии в пограничном слое атмосферы (ПСА).

Модель реализуется в несколько этапов. Сначала, исходя из результатов предварительных измерений необходимых метеопараметров, решается задача на установление динамического потока в условиях заданного рельефа местности [2, 3]. Расчёты базируются на решении уравнений гидротермодинамики с учётом автомоделейных зависимостей Мони́на—Обухова [4] и теории подобия в слое постоянных потоков. Турбулентное замыкание проведено на основе двумерной модели Смагоринского [5].

Полученные при этом характеристики, такие как компоненты скорости ветра, значение коэффициента турбулентности, а также высота устойчивого приземного слоя, используются затем при реализации блока переноса примеси, в основе которого лежит уравнение полуэмпирической теории переноса и турбулентной диффузии для концентрации $C(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \frac{\partial (w - w_s)C}{\partial z} = \alpha_c \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial C}{\partial x} + \alpha_c \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial C}{\partial y} + \alpha_c \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial C}{\partial z} + R_c, \quad (1)$$

где u, v, w — компоненты вектора скорости; w_s — скорость гравитационного оседания примеси; K_x, K_y, K_z — коэффициенты турбулентного обмена в направлениях x, y, z соответственно; $\alpha_c = 1/Sm$; Sm — число Шмидта; R_c — интенсивность эмиссии вещества ($\text{гм}^{-3}\text{с}^{-1}$).

Базовый набор краевых условий для уравнения (1) формулируется в следующем виде:

на боковых границах области —

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0;$$

на подстилающей поверхности —

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = \delta + z_u,$$