Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Павлов, А. В. Алимов, Обобщение уравнений Лагранжа для анализа механических систем с наследственными элементами, моделируемыми телами Кельвина, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007, выпуск 2(), 192–194

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu559>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:29:39

Теоретическая механика

УДК 539.3

Г. В. Павлов, А. В. Алимов

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ АНАЛИЗА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НАСЛЕДСТВЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ, МОДЕЛИРУЕМЫМИ ТЕЛАМИ КЕЛЬВИНА

Предложен новый подход при построении математической модели тела Кельвина в лагранжевых координатах.

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к применению реологических моделей в решении задач механики твёрдого деформируемого тела [1, 2, 3]. Авторы работы предлагают новый подход в построении уравнения движения в обобщённых координатах применительно к механическим системам с упруго-вязкими элементами, напряжённо-деформированное состояние которых описывается моделью Кельвина. Как отмечается в [1] эта модель наиболее точно отражает механические свойства наследственных тел. По гипотезе Кельвина—Фойхта [4] несовершенной упругости материала приписывается вязкая природа. Применение этой гипотезы корректно при рассмотрении как стационарных, так и нестационарных колебаний, несмотря на то, что для металлов она не подтверждается экспериментально.

Пусть на механическую систему наложено s голономных, идеальных, удерживающих связей

$$f_\chi(x, t) = 0 \quad (\chi = 1, 2, \dots, s), \quad (1)$$

где декартовы координаты x_v выражены через обобщённые координаты равенствами вида

$$x_v = \varphi_v(q_i, t), \quad \dot{x}_v = \dot{\varphi}_v(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2)$$

Здесь m — число степеней свободы. Воспользуемся уравнением Даламбера—Лагранжа

$$\sum_{v=1}^{3N} (X_v - m_v \ddot{x}_v) \delta x_v = 0, \quad (3)$$

где N — число материальных точек системы, X_v — проекция v -той силы на оси декартовой системы координат, m_v — масса v -той точки. Наделяя силу X_v вязко-упругими свойствами, характерными для модели тела Кельвина, положим

$$X_v = F_v - \tilde{c} \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K P_k(y_k) e_{vk}, \quad \dot{X}_v = \dot{F}_v - c \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K (\dot{P}_k(y_k) e_{vk} + P_k(y_k) \dot{e}_{vk}), \quad (4)$$

где F_v — заданная активная сила; $\tilde{c} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$, $c = c_1$ — коэффициенты жёсткости упругих элементов тела Кельвина; e_{vk} — косинусы углов, образуемые силой реакции $P_k(y_k)$ реологического элемента с осями координат; $y_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N})$ — реологическая координата k -ого реологического элемента, K — число реологических элементов. Подставляя (4) в (3), дифференцируя уравнение (3) по времени и меняя порядок дифференцирования и варьирования, получим

$$\sum_{v=1}^{3N} \left[\left(\dot{F}_v - m_v \dot{x}_v - c \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K \dot{P}_k e_{vk} - \sum_{k=1}^K P_k \dot{e}_{vk} \right) \delta x_v + \left(F_v - m_v \ddot{x}_v - \tilde{c} \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K P_k e_{vk} \right) \delta \dot{x}_v \right] = 0. \quad (5)$$

Из (5), в силу независимости вариаций δx_v и $\delta \dot{x}_v$, вытекают очевидные равенства

$$\sum_{v=1}^{3N} \left(\dot{F}_v - m_v \dot{x}_v - c \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K \dot{P}_k e_{vk} - \sum_{k=1}^K P_k \dot{e}_{vk} \right) = 0, \quad \sum_{v=1}^{3N} \left(F_v - m_v \ddot{x}_v - \tilde{c} \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K P_k e_{vk} \right) = 0, \quad (6)$$

которые будут востребованы в дальнейшем. Используя (2), найдём вариации координат и скоростей

$$\delta x_v = \sum_{i=1}^m \frac{\partial x_v}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \delta \dot{x}_v = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \dot{x}_v}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \quad (v = 1, 2, 3, \dots, 3N) \quad (7)$$

и подставим их в (5):

$$\sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{3N} \left[\left(\dot{F}_v - m_v \dot{x}_v - c \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K \dot{P}_k e_{vk} - \sum_{k=1}^K P_k \dot{e}_{vk} \right) \frac{\partial x_v}{\partial q_i} \delta q_i + \left(F_v - m_v \ddot{x}_v - \tilde{c} x_v - \sum_{k=1}^K P_k e_{vk} \right) \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial q_i} \delta q_i + \right. \\ \left. + \left(F_v - m_v \ddot{x}_v - \tilde{c} x_v - \sum_{k=1}^K P_k e_{vk} \right) \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial q_i} \delta q_i + \left(F_v - m_v \ddot{x}_v - \tilde{c} x_v - \sum_{k=1}^K P_k e_{vk} \right) \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] = 0. \quad (8)$$

Приравнявая слагаемые при одинаковых вариациях к нулю, получим систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{3N} \left[\left(\dot{F}_v - m_v \dot{x}_v - c \dot{x}_v - \sum_{k=1}^K \dot{P}_k e_{vk} - \sum_{k=1}^K P_k \dot{e}_{vk} \right) \frac{\partial x_v}{\partial q_i} + \left(F_v - m_v \ddot{x}_v - \tilde{c} x_v - \sum_{k=1}^K P_k e_{vk} \right) \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0, \\ \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{3N} \left(F_v - m_v \ddot{x}_v - \tilde{c} x_v - \sum_{k=1}^K P_k e_{vk} \right) \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = 0. \quad (9)$$

Используя известные тождества Лагранжа

$$\frac{\partial x_v}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \ddot{x}_v}{\partial \ddot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \ddot{x}_v}{\partial \dot{q}_i}, \quad (10)$$

и свойство производной скалярного произведения, преобразуем равенства (9) к лагранжевым переменным:

$$\dot{F}_v \frac{\partial x_v}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(F_v \frac{\partial x_v}{\partial q_i} \right) - F_v \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial q_i}. \quad (11)$$

Суммируя (11) по индексам v и i , учитывая равенства (6) и (10), находим

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{3N} F_v \frac{\partial x_v}{\partial q_i} = \frac{dQ_i}{dt}, \quad (12)$$

где Q_i — i -тая обобщённая сила.

Проводя суммирование в равенстве (9), получим явные выражения следующих слагаемых:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{3N} F_v \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^K P_k b_{ki} - \sum_{k=1}^K \dot{P}_k b_{ki} - \sum_{k=1}^K P_k \dot{e}_{vk} \frac{\partial x_v}{\partial q_i}, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{3N} m_v x_v \frac{\partial x_v}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^m \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i. \quad (14)$$

Коэффициент b_{ki} определяется по формуле

$$b_{ki} = \sum_{v=1}^{3N} e_{vk} \frac{\partial x_v}{\partial q_i}, \quad (15)$$

а энергия ускорений, потенциальная энергия и функция рассеяния энергии — соответственно по формулам

$$S = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{3N} m_v \ddot{x}_v, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{3N} \tilde{c} x_v^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{3N} b_k \dot{x}_v^2, \quad (16)$$

где b_k — коэффициент внутреннего трения.

Окончательно получаем следующее:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{v=1}^{3N} m_v x_v \frac{\partial x_v}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^m \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i. \quad (17)$$

При построении равенства (13) учитывалось тождество $\frac{\partial \dot{x}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial \ddot{x}_v}{\partial \dot{q}_i}$, вытекающее из представления

$$\frac{d\dot{x}_v}{dt} \equiv \ddot{x}_v = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \dot{x}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial t}.$$

Подставляя в уравнения системы (9) промежуточные выкладки (10)–(17), получим

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{k=1}^K \dot{P}_k b_{ki} + \sum_{k=1}^K P_k \dot{b}_{ki} - \frac{dQ_i}{dt} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0, \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} + \sum_{k=1}^K P_k b_{ki} - Q_i + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right] \delta \dot{q}_i = 0. \quad (19)$$

Для голономных систем вариации δq_i и $\delta \dot{q}_i$ независимы. Поэтому из (18) и (19) вытекает система следующая дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{k=1}^K \dot{P}_k b_{ki} + \sum_{k=1}^K P_k \dot{b}_{ki} = \frac{dQ_i}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} + \sum_{k=1}^K P_k b_{ki} = Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (21)$$

Одно из представленных уравнений является следствием другого. Поэтому оставляя уравнение (21) и проводя замену

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i},$$

где $T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{3N} m_v x_v^2$ — кинетическая энергия, окончательно запишем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^K P_k b_{ki} = Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (22)$$

Уравнение (22) было получено в [1] другим способом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Горошко О. А. Аналитика динамика (механика) дискретных наследных система (на сербском языке) [Текст] / О. А. Горошко, К. Хедрих. — Издавачка Универзитета у Нишу, 2000. — 429 с.
2. Радченко В. П. Анализ нелинейной обобщенной модели Максвелла [Текст] / В. П. Радченко, Д. В. Шапиевский // Вестн. Сам. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2005. — № 38. — С. 55–64. — (ISBN 5–7964–0765–1).
3. Макарова Л. Л. Демпфирование колебаний в среде, моделируемой последовательным соединением элемента Кельвина с параллельно соединенными элементами Фойхта и Джеффриса [Текст] / Л. Л. Макарова, В. В. Кондрашов. — Тула: Тул. госуд. ун-т, 2005. — 5 с. — (Деп. в ВИНТИ 24.06.2005. № 908–В2005).
4. Василенко Н. В. Теория колебаний [Текст] / Н. В. Василенко. — Киев: Высш. шк., 1992. — 430 с.

Самарский государственный архитектурно-строительный
университет, г. Самара
mishart@samaradom.ru

Поступила 09.02.2007

В окончательном варианте
03.08.2007