Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, Р. Ж. Габдушев, С. А. Стефанюк, Д. В. Левин,
Об одном методе определения собственных значений краевой задачи Штурма–
Лиувилля, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, вы-
пуск 12, 17–23

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu56>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:54:46

В.А.Кудинов, Б.В.Аверин, Р.Ж.Габдушев, С.А.Стефанюк, Д.В.Левин

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Разработана методика определения собственных значений краевой задачи Штурма-Лиувилля, основанная на совместном использовании точных (метод разделения переменных) и приближенных аналитических (взвешенных невязок) методов. Показано, что уже в третьем приближении для бесконечно протяженных пластины и цилиндра отклонение получаемых собственных значений от точных не превышает 1%, а первое собственное число практически совпадает с точным.

Составной частью классического аналитического метода решения нестационарных краевых задач (метода разделения переменных - метода Фурье) является процесс нахождения собственных значений. Аналитические методы их определения известны лишь для наиболее простых дифференциальных уравнений применительно к телам классической формы (пластина, цилиндр, шар). При решении более сложных уравнений и особенно в случаях, когда граничные условия являются функциями координат или времени, применение метода Фурье оказывается весьма затруднительным.

Классический метод связан с тем, что находятся функции, точно удовлетворяющие дифференциальным уравнениям, полученным после разделения переменных. Неизвестные коэффициенты решения и собственные числа находятся из начальных и граничных условий, которые также выполняются точно.

В вариационных методах решение принимается таким, что оно с самого начала точно удовлетворяет граничным условиям (методы Ритца, Л.В.Канторовича, Бубнова-Галеркина) или дифференциальному уравнению (метод Треффтца). При этом решение содержит неизвестные коэффициенты, определяемые из приближенного выполнения дифференциального уравнения (методы Ритца, Л.В.Канторовича, Бубнова-Галеркина) или граничных условий (метод Треффтца). Точность получаемого решения зависит от числа приближений. Причем, с увеличением числа приближений точность решения не всегда может возрастать. Это связано с тем, что неизвестные коэффициенты решения находятся из систем алгебраических линейных уравнений, матрицы которых, являющиеся заполненными квадратными матрицами, как правило, плохо обусловлены [1].

Ниже будет изложена методика определения собственных значений, основанная на совместном использовании точных и приближенных аналитических (вариационных) методов. Основная идея предлагаемого здесь подхода состоит в следующем. Строится решение в виде ограниченного ряда по степеням координаты x , содержащего неизвестные коэффициенты. Затем вводятся дополнительные граничные условия, которые выводятся из основного дифференциального уравнения. Неизвестные коэффициенты решения находятся из основных и дополнительных граничных условий. Для нахождения собственных значений составляется интеграл взвешенной невязки основного дифференциального уравнения. В итоге для определения собственных значений получаем алгебраический полином, степень которого зависит от числа членов ряда принятого решения.

В качестве конкретного примера рассмотрим краевую задачу Штурма-Лиувилля в следующей математической постановке:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad (0 \leq x \leq 1); \quad (1)$$

$$y'(0) = 0; \quad (2)$$

$$y(1) = 0. \quad (3)$$

Используя уравнение (1) и граничные условия (2), (3), введем дополнительные граничные условия. Для того, чтобы получить лишь одно (первое) собственное число, достаточно ввести следующие дополнительные граничные условия

$$y(0) = 1; \quad (4)$$

$$y''(1) = 0; \quad (5)$$

$$y'''(0) = 0. \quad (6)$$

Соотношения (5) и (6) следуют из уравнения (1) соответственно при $x=1$ и $x=0$, Причем, для получения соотношения (6) уравнение (1) предварительно дифференцируется по x .

Решение задачи (1)-(6) разыскивается в виде следующего ряда

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4, \quad (7)$$

где C_i ($i=\overline{0,4}$) - неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (2)-(6).

Подставляя (7) в (2)-(6), получим

$$C_0 = 1; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = -1,2; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = 0,2. \quad (8)$$

Соотношение (7) с учетом найденных значений коэффициентов примет вид

$$y = 1 - 1,2x^2 + 0,2x^4. \quad (9)$$

Соотношение (9) точно удовлетворяет граничным условиям (2)-(6). Для нахождения первого собственного числа составим невязку уравнения (1) и проинтегрируем ее в пределах от $x=0$ до $x=1$:

$$\int_0^1 [-2,4 + 2,4x^2 + \lambda(1 - 1,2x^2 + 0,2x^4)] dx = 0. \quad (10)$$

Вычисляя интегралы, получим относительно λ алгебраическое уравнение, из которого находим $\lambda = 2,6$. Отметим, что точное значение первого собственного числа составляет $\lambda = 2,4674$ [2]. Отклонение полученного значения λ от точного составляет 5,37%.

Для получения двух собственных чисел (первого и второго) достаточно вместо граничного условия (5) взять условие

$$y''(0) = -\lambda, \quad (11)$$

получаемое из уравнения (1) в точке $x=0$. Решение в этом случае также принимается в виде ряда (7), где неизвестные коэффициенты C_i ($i=\overline{0,4}$) находятся из граничных условий (2), (3), (4), (6), (11) имеют значения:

$$C_0 = 1; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = -0,5\lambda; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = 0,5\lambda - 1.$$

Соотношение (7) в данном случае примет вид

$$y = 1 - 0,5\lambda x^2 + (0,5\lambda - 1)x^4. \quad (12)$$

Составляя интеграл взвешенной невязки уравнения (1), получим

$$\int_0^1 [12(0,5\lambda - 1)x^2 - 0,5\lambda^2 x^2 + \lambda(0,5\lambda - 1)x^4] dx = 0. \quad (13)$$

Вычисляя интегралы в (13), находим $0,06666\lambda^2 - 1,8\lambda + 4 = 0$.

Отсюда $\lambda_1 = 2,4433$; $\lambda_2 = 24,5566$. Точное значение второго собственного числа $\lambda_2 = 22,2066$. Отметим, что точность первого собственного числа значительно улучшилась (погрешность 0,98%).

Для получения трех собственных чисел ко всем введенным выше граничным условиям (2)-(6), (11) добавим следующие

$$y^{IV}(0) = \lambda^2; \quad (14)$$

$$y^{IV}(1) = 0; \quad (15)$$

$$y^V(0) = 0. \quad (16)$$

Все эти условия получены из уравнения (1) путем его дифференцирования. Решение задачи (1)-(6), (11), (14)-(16) разыскивается в виде

$$y = \sum_{i=0}^8 C_i x^i. \quad (i=\overline{0,8}) \quad (17)$$

Из граничных условий (2)-(6), (11), (14)-(16) находим

$$C_0 = 1; \quad C_2 = -0,5\lambda; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = \frac{1}{24}\lambda; \quad C_5 = 0;$$

$$C_6 = (-7749\lambda^2 + 147420\lambda - 317520)/45360;$$

$$C_7 = (2817\lambda^2 - 62100\lambda + 136080)/15120;$$

$$C_8 = (-4\lambda^2 + 95\lambda - 210)/70.$$

Составляя интеграл взвешенной невязки уравнения (1) и вычисляя соответствующие интегралы, для определения собственных чисел получим следующий алгебраический полином

$$35\lambda^3 - 3076\lambda^2 + 56400\lambda - 120960 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 2,4673942$; $\lambda_2 = 22,13237$; $\lambda_3 = 63,28596$.

В табл.1 приведены результаты расчетов, полученные в настоящей работе в сравнении с данными [3] и с точными значениями собственных чисел [2] для одного, двух и трех приближений. Отметим, что в работе [3] совместно использованы интегральные преобразования Лапласа и ортогональный метод Бубнова-Галеркина.

Т а б л и ц а 1

Собственные значения краевой задачи (1) – (3)

Собственные числа	Первое приближение		Второе приближение		Третье приближение		Точные значения [2]
	Данные настоящей работы	Данные [3]	Данные настоящей работы	Данные [3]	Данные настоящей работы	Данные [3]	
λ_1	2,6	2,5	2,4433	2,4674	2,4674	2,4674	2,4674
λ_2			24,5566	25,5330	22,1324	22,2170	22,2066
λ_3					63,2858	87,7390	61,6850

Анализ результатов настоящей работы, полученных в третьем приближении, показывает, что величина первого собственного числа практически совпадает с точным значением. Погрешность в определении второго и третьего собственных чисел соответственно составляет 0,0099% и 0,97%.

В качестве еще одного конкретного примера рассмотрим краевую задачу теплопроводности для неограниченного цилиндра в следующей математической постановке (граничные условия первого рода)

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \quad (Fo > 0; \quad 0 \leq \rho \leq 1); \quad (18)$$

$$\Theta(\rho, 0) = 1; \quad (19)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0; \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} = 0, \quad (21)$$

где $\Theta = (T - T_0)/(T_{cp} - T_0)$ - относительная избыточная температура; $Fo = a\tau/R$ - число Фурье; $\rho = r/R$ - безразмерная координата; R - радиус цилиндра; T_0 - начальная температура; T_{cp} - температура среды; a - коэффициент температуропроводности; τ - время; r - координата.

Введем дополнительные граничные условия. Для этого продифференцируем (20) по Fo

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (22)$$

Учитывая (18), получим

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} = 0. \quad (23)$$

Из (23) получаем одно из дополнительных граничных условий

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} = 0. \quad (24)$$

Дифференцируя (21) по Fo , находим $\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial Fo \partial \rho} = 0$. Так как

$$\frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo \partial \rho} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho \partial Fo},$$

то, привлекая уравнение (18), получим

$$\frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho \partial Fo} = \frac{\partial^3 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho}. \quad (25)$$

В точке $\rho = 0$ возникают неопределенности, которые раскроем по правилу Лопиталя

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \rho \partial Fo} = \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \rho^3} + \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \rho^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \rho^3} = \frac{3}{2} \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \rho^3} = 0.$$

Отсюда имеем еще одно дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \rho^3} = 0. \quad (26)$$

Дифференцируя (24) по Fo , получим

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \rho} = 0$$

или

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2 \partial Fo} + \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho \partial Fo} = 0.$$

Привлекая уравнение (18), имеем

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2 \partial Fo} = -\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2}. \quad (27)$$

Продифференцируем (25) по ρ :

$$\frac{\partial^3 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2 \partial Fo} = \frac{\partial^4 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^4} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho}. \quad (28)$$

Сравнивая (27) и (28) в точке $\rho = 1$, находим следующее дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^4 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^4} + 2 \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^3} - \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} = 0. \quad (29)$$

Дифференцируя (21) дважды по ρ и один раз по Fo , получим

$$\frac{\partial^4 \Theta(0, Fo)}{\partial \rho^3 \partial Fo} = 0.$$

Привлекая уравнение (18) и раскрывая полученные неопределенности в точке $\rho = 0$ по правилу Лопиталя, записываем еще одно дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^5 \Theta(0, Fo)}{\partial \rho^5} = 0. \quad (30)$$

Следуя методу разделения переменных, решение уравнения (18) представляется в виде

$$\Theta(\rho, Fo) = \sum_{n=1}^3 A_n X(\rho, \lambda_n) e^{-\lambda_n Fo}, \quad (31)$$

где A_n - неизвестные коэффициенты, определяемые из начального условия (19); $X(\rho, \lambda_n)$ - функция, удовлетворяющая уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 X(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dX(\rho)}{d\rho} + \lambda X(\rho) = 0. \quad (32)$$

Граничные условия для уравнения (25) с учетом (19), (20), (21), (24), (26), (29), (30) будут

$$\begin{aligned} X(0) &= 1; X(1) = 0; X'(0) = 0; X''(0) = -\lambda/2; X'''(0) = 0; X^{IV}(0) = 0; \\ X''(1) + X'(1) &= 0; X^{IV}(1) + 2X'''(1) - X''(1) + X'(1) = 0; X^{IV}(0) = 3\lambda/8. \end{aligned} \quad (33)$$

Решение задачи (32), (33) разыскивается в виде степенного ряда

$$X(\rho) = \sum_{i=0}^8 C_i \rho^i \quad (i = \overline{1,8}), \quad (34)$$

где C_i - коэффициенты, определяемые из граничных условий (33). Подставляя (34) в (33), после решения получаемых алгебраических линейных уравнений, будем иметь

$$C_0 = 1; C_1 = 0; C_2 = -\lambda/4; C_3 = 0; C_4 = -\lambda^2/64; C_5 = 0; C_6 = -(4548\lambda^2 - 120720\lambda + 551936)/68672; \\ C_7 = (79\lambda^2 - 2448\lambda + 11520)/1073; C_8 = -(1581\lambda^2 - 53120\lambda + 254016)/68672.$$

Составляя невязку уравнения (32) и интегрируя ее в пределах от $\rho = 0$ до $\rho = 1$, получим

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2(C_i \rho^i)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d(C_i \rho^i)}{d\rho} + \lambda C_i \rho^i \right] d\rho = 0.$$

После вычисления интегралов с учетом найденных значений коэффициентов C_i для нахождения собственных необходимо решить следующее алгебраическое уравнение третьей степени:

$$1261\lambda^3 - 139500\lambda^2 + 3609216\lambda - 16450560 = 0.$$

Его корни имеют значения:

$$\lambda_1 = 5,78295; \quad \lambda_2 = 30,2371; \quad \lambda_3 = 74,6065.$$

Точные значения собственных чисел [2]:

$$\lambda_1 = 5,78306; \quad \lambda_2 = 30,4733; \quad \lambda_3 = 74,8865.$$

Погрешность определения первого, второго и третьего собственных чисел соответственно составляет 0,0019%, 0,775%, 0,374%.

В работе [3] для трех первых собственных чисел в случае использования трех приближений получены следующие значения

$$\lambda_1 = 5,7832; \quad \lambda_2 = 30,7120; \quad \lambda_3 = 113,50.$$

Найдем собственные числа (второе приближение) задачи теплопроводности для бесконечного цилиндра при граничных условиях третьего рода. Математическая постановка задачи в этом случае будет аналогична задаче (18)-(21) за исключением граничного условия (20), которое примет вид

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} + Bi \Theta(1, Fo) = 0. \quad (35)$$

Введем дополнительные граничные условия. Одним из них будет условие (26). Для получения следующего дополнительного граничного условия продифференцируем (35) по Fo :

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial Fo \partial \rho} + Bi \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (36)$$

Дифференцируя уравнение (18) по ρ и записывая его для точки $\rho = 1$, получим

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho \partial Fo} = + \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} = \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^3} + \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho}. \quad (37)$$

Соотношение (36) перепишем с учетом уравнения (18):

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho \partial Fo} = -Bi \left[\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} \right] = 0. \quad (38)$$

Сравнивая (37), (38), находим

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^3} + \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} + Bi \left[\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} \right] = 0.$$

Отсюда получаем следующее дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^3} + (Bi + 1) \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \rho^2} + (Bi - 1) \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \rho} = 0. \quad (39)$$

Следуя методу разделения переменных, решение уравнения (18) представляется в виде

$$\Theta(\rho, Fo) = \sum_{n=1}^2 A_n X(\rho, \lambda_n) e^{-\lambda_n Fo}, \quad (40)$$

где $X(\rho, \lambda_n)$ определяется из уравнения (32). Граничные условия для него (основные и дополнительные) принимают следующее представление:

$$\begin{aligned} X(0)=1; X'(0)=0; X'''(0)=0; \frac{d^2 X(0)}{d\rho^2} = -\frac{\lambda}{2}; \\ \frac{dX(1)}{d\rho} + BiX(1)=0; \frac{d^3 X(1)}{d\rho^3} + (Bi+1)\frac{d^2 X(1)}{d\rho^2} + (Bi-1)\frac{dX(1)}{d\rho} = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Решение задачи (32), (41) разыскивается в виде

$$X(\rho) = \sum_{i=0}^5 C_i \rho^i \quad (i=\overline{1,5}). \quad (42)$$

Подставляя (42) в граничные условия (41), получим следующие значения коэффициентов C_i ($i=\overline{1,5}$):

$$\begin{aligned} C_0 &= 1; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = -\lambda/4; \quad C_3 = 0; \\ C_4 &= \frac{21Bi^3\lambda + 147Bi^2\lambda + 360Bi\lambda + 300\lambda - 100Bi^3 - 500Bi^2 - 600Bi}{36Bi^3 + 324Bi^2 + 1064Bi + 1120}; \\ C_5 &= -\frac{3Bi^2\lambda + 12Bi\lambda + 16Bi^2 - 32Bi}{9Bi^2 + 63Bi + 140}. \end{aligned}$$

Т а б л и ц а 2

Собственные значения задачи теплопроводности для цилиндра

Bi	0	0,1	0,5	1	10	50	100
λ_1		0,195046	0,884284	1,574786	4,75907	5,57678	5,689937
λ_2	14,83444	15,02837	15,78598	16,68523	24,60317	28,49665	29,08654
λ_1 точное		0,19501	0,88511	1,57703	4,45022	5,55639	5,66868
λ_2 точное	14,68192	14,88185	15,67685	16,64232	25,33310	29,28108	29,86841
ϵ_1 %		0	0,093	0,14	0,18	0,4	0,4
ϵ_2 %	1	0,98	0,7	0,25	2,8	2,7	2,6

Интегрируя невязку дифференциального уравнения (32) в пределах от $\rho=0$ до $\rho=1$, получим

$$\begin{aligned} (39Bi^3 + 507Bi^2 + 2421Bi + 3171)\lambda^2 - (1384Bi^3 + 15224Bi^2 + 48432Bi + 47040)\lambda + \\ + 6720Bi^3 + 60480Bi^2 + 94080Bi = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Значения собственных чисел, найденные из уравнения (43) в сравнении с точными их значениями для различных величин Bi приведены в табл.2, где ϵ - погрешность определения первого и второго собственных чисел в процентах.

Анализ полученных выше результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. Можно отметить достаточно высокую точность определения собственных чисел. Например, для пластины в случае трех приближений первое собственное число с точностью до четырех знаков совпадает с точным его значением. Погрешность в определении второго и третьего собственных чисел составляет соответственно 0,0099% и 0,97%. Не меньшей оказывается точность определения собственных чисел и для бесконечного цилиндра. Погрешность по отношению к точным значениям для первого, второго и третьего собственных чисел соответственно составляет 0,0019%, 0,775%, 0,374%. Таким образом, в обоих случаях отличие полученных решений от точных не превышает 1%.

Достаточно высокая точность наблюдается и при граничных условиях третьего рода. Для чисел $0 \leq Bi \leq 1$ отличие получаемых во втором приближении решений от точных не превосходит 1%, а для $1 \leq Bi \leq 100$ - не более 2,8%.

2. Важной отличительной особенностью предлагаемого здесь метода определения собственных чисел состоит в том, что он может быть применен для уравнений практически любой сложности, так как нет необходимости в использовании функций, точно удовлетворяющих этим уравнениям. Процесс удовлетворения уравнения сводится к

интегрированию его невязки с последующим решением алгебраического уравнения соответствующей степени. То есть уравнение здесь удовлетворяется приближенно (в зависимости от числа приближений). В связи с чем, такой подход к решению задачи можно классифицировать как совместное использование метода разделения переменных и вариационных методов.

Отметим, что в данном случае для получения решения используются лишь алгебраические полиномы. При этом в процессе получения окончательного результата приходится решать системы алгебраических линейных уравнений и алгебраические уравнения соответствующих степеней. Таким образом, здесь удастся избежать решения тригонометрических трансцендентных уравнений, применения специальных функций (Бесселя, Лагранжа и др.) даже при решении уравнений, которым эти функции удовлетворяют.

Такая алгебраизация решения позволяет значительно упростить процесс получения решения, сведя его к выполнению последовательности некоторых простых стандартных операций. Эту работу ввиду ее простоты наиболее целесообразно переложить на средства вычислительной техники. Все это позволяет говорить о некотором сближении предлагаемого здесь подхода с численными методами, важнейшей положительной чертой которых является индифферентность к типу дифференциального оператора. При этом окончательное решение имеет аналитический вид.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудинов В.А., Калашиников В.В., Карташов Э.М., Лаптев Н.И., Сергеев С.К. Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Энергоатомиздат, 1997. 426с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600с.
3. Цой П.В. Методы расчета задач тепломассопереноса. М.: Энергоатомиздат, 1984. 423с.