Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Андреев, С. В. Лексина, Задача граничного управления для системы волновых уравнений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 5–10

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:57:57

Дифференциальные уравнения

УДК 517.95

А. А. Андреев, С. В. Лексина

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Получены необходимые условия на функции, определяющие начальные и финальные условия, при которых удаётся решить задачу управления для объектов, процесс колебания которых описывается системой волновых уравнений с граничными условиями первого рода.

Введение. Впервые теоретическая постановка задачи об управлении колебаниями в достаточно чёткой математической форме, как отмечено в [1], была рассмотрена А. Г. Бутковским [2] в 60 годах XX столетия. В настоящее время ведётся решение задач управления упругими колебаниями с помощью граничных управлений при различных типах граничных условий. В проводимых исследованиях рассматриваются колебания, описываемые одномерным волновым уравнением с линейными условиями первого, второго, третьего рода, а также, когда на границе заданы краевые условия различных родов [3–11].

Интересные результаты, связанные с этой тематикой, представлены А. В. Боровских в работах [12, 13], В. А. Ильиным [14] для уравнения неоднородной струны

$$p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[q(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

Сформулированы условия, позволяющие решить задачу управления, и выписаны граничные управления в явном виде.

В. А. Ильиным и Е. И. Моисеевым в [7] получены новые результаты при решении задачи граничного управления на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) + c^2 u(x, t) = 0.$$

Целью настоящей работы является изучение возможности распространения результатов В. А. Ильина на случай объектов, процесс колебания которых описывается системой волновых уравнений, а именно, получение решения задачи управления с граничными условиями первого рода. Первые обобщения задачи граничного управления для системы волновых уравнений были представлены в работе [15].

Представленная статья посвящена решению задачи управления процессом, колебание которого описывается системой дифференциальных уравнений

$$u_{tt} - Au_{xx} = 0 \tag{1}$$

в области $Q_{l,T} = [0; l] \times [0; T]$, где $u = [u_1(x, t), u_2(x, t)]^T$ — вектор-функция, A — постоянная, квадратная матрица второго порядка.

Пусть

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

$$u(x, T) = \varphi_2(x), \quad u_t(x, T) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

где $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ — две произвольные вектор-функции из классов $C^2[0, l]$, $C^1[0, l]$ соответственно.

Пару вектор-функций $\{u(x, t), u_t(x, t)\}$, заданных на отрезке $[0, l]$ при фиксированном t , следуя [6], будем называть состоянием колебательной системы в момент времени t .

Естественно возникает задача о существовании и о явном аналитическом представлении граничных управлений, удовлетворяющих некоторым условиям, обеспечивающих переход колебательного процесса из состояния $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ при $t = 0$ в состояние $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ при $t = T$.

Решение данной задачи будем искать как решение краевых задач с заданными начальными условиями (2) и граничными условиями, которые обеспечивают выполнение финальных условий (3) [1].

В качестве граничных условий рассмотрим условия первого рода:

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

1. Задача управления с граничными условиями первого рода. Найти вектор-функции $\mu(t), \nu(t) \in C^2[0, T]$ такие, чтобы для решения $u(x, t)$ первой краевой задачи с заданными начальными условиями (2) в момент времени T выполнялись финальные условия (3).

Рассмотрим две вспомогательные задачи.

Задача 1 (Задача о гашении колебаний). Найти вектор-функции $\mu(t), \nu(t) \in C^2[0, T]$ такие, чтобы для решения $u(x, t)$ первой краевой задачи с заданными начальными условиями (2) в момент времени $t = T$ выполнялись нулевые финальные условия:

$$u(x, T) = 0, \quad u_t(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (5)$$

Задача 2 (О переводе первоначально покоящейся системы в заданное состояние). Найти вектор-функции $\mu(t), \nu(t) \in C^2[0, T]$ такие, чтобы для решения $u(x, t)$ первой краевой задачи с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (6)$$

в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия (3).

Решение исходной задачи управления будем искать как сумму решений задачи 1 и задачи 2 [1].

Пусть λ_1^2, λ_2^2 — действительные и различные собственные значения матрицы A . В случае, когда собственные значения матрицы A равны и $\Lambda_A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$, результаты, представленные в данной статье, совпадают с результатами, полученными В. А. Ильиным [4] и Л. Н. Знаменской [1].

Введём обозначение $w = S^{-1}u$, где $S = \begin{pmatrix} \frac{\alpha t_{21}}{\lambda_1^2 - p} & t_{12} \\ t_{21} & \frac{\beta t_{12}}{\lambda_2^2 - q} \end{pmatrix}$ — матрица перехода при диагонализации матрицы A . Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} w_{1tt} - \lambda_1^2 w_{1xx} = 0, \\ w_{2tt} - \lambda_2^2 w_{2xx} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Начальные условия (2) запишутся в виде ($0 \leq x \leq l$):

$$\begin{cases} w(x, 0) = S^{-1}u(x, 0) = \tilde{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{11}(x) \\ \tilde{\varphi}_{21}(x) \end{pmatrix}, \\ w_t(x, 0) = S^{-1}u_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{11}(x) \\ \tilde{\psi}_{21}(x) \end{pmatrix}; \end{cases} \quad (8)$$

нулевые финальные условия ($0 \leq x \leq l$):

$$\begin{cases} w(x, T) = S^{-1}u(x, T) = \tilde{\varphi}_1(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{12}(x) \\ \tilde{\varphi}_{22}(x) \end{pmatrix} = 0, \\ w_t(x, T) = S^{-1}u_t(x, T) = \tilde{\psi}_1(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{12}(x) \\ \tilde{\psi}_{22}(x) \end{pmatrix} = 0; \end{cases} \quad (9)$$

краевые условия ($0 \leq t \leq T$):

$$\begin{cases} w(0, t) = S^{-1}u(0, t) = \tilde{\underline{\mu}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{\mu}}_1(t) \\ \tilde{\underline{\mu}}_2(t) \end{pmatrix}, \\ w(l, t) = S^{-1}u(l, t) = \tilde{\underline{\nu}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{\nu}}_1(t) \\ \tilde{\underline{\nu}}_2(t) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (10)$$

где $0 \leq T \leq \frac{1}{\max\{\lambda_1^2, \lambda_2^2\}}$.

Решение первой краевой задачи с начальными условиями для системы (7) представляется следующим образом [16]:

$$\begin{cases} w_1(x, t) = \frac{\tilde{\Phi}_{11}(x+\lambda_1 t) + \tilde{\Phi}_{11}(x-\lambda_1 t)}{2} + \frac{1}{2\lambda_1} \int_{x-\lambda_1 t}^{x+\lambda_1 t} \tilde{\Psi}_{11}(z) dz + \tilde{\mu}_1 \left(t - \frac{x}{\lambda_1} \right) + \tilde{\nu}_1 \left(t + \frac{x-l}{\lambda_1} \right), \\ w_2(x, t) = \frac{\tilde{\Phi}_{21}(x+\lambda_2 t) + \tilde{\Phi}_{21}(x-\lambda_2 t)}{2} + \frac{1}{2\lambda_2} \int_{x-\lambda_2 t}^{x+\lambda_2 t} \tilde{\Psi}_{21}(z) dz + \tilde{\mu}_2 \left(t - \frac{x}{\lambda_2} \right) + \tilde{\nu}_2 \left(t + \frac{x-l}{\lambda_2} \right). \end{cases} \quad (11)$$

Функции $\tilde{\Phi}_{i1}$, $\tilde{\Psi}_{i1}$ — нечётные продолжения функций $\tilde{\varphi}_{i1}$, $\tilde{\psi}_{i1}$ соответственно на сегменты $[-l; 0]$, $[l; 2l]$, функции $\tilde{\mu}_i$, $\tilde{\nu}_i$ удовлетворяют условиям $\tilde{\mu}_i(t) = \tilde{\mu}_i(t)$ на $[0; T]$, $\tilde{\mu}_i(0) = 0$, $\tilde{\mu}_i(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Аналогичным условиям удовлетворяет функция $\tilde{\nu}_i$, где $i = 1, 2$.

Воспользовавшись нулевыми финальными условиями (9), получим

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\Phi}_{i1}(x+\lambda_i T) + \tilde{\Phi}_{i1}(x-\lambda_i T)}{2} + \frac{1}{2\lambda_i} \int_{x-\lambda_i T}^{x+\lambda_i T} \tilde{\Psi}_{i1}(z) dz + \tilde{\mu}_i \left(T - \frac{x}{\lambda_i} \right) + \tilde{\nu}_i \left(T + \frac{x-l}{\lambda_i} \right) = 0, \\ \frac{\tilde{\Phi}'_{i1}(x+\lambda_i T) - \tilde{\Phi}'_{i1}(x-\lambda_i T)}{2} + \frac{\tilde{\Psi}_{i1}(x+\lambda_i T) + \tilde{\Psi}_{i1}(x-\lambda_i T)}{2\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i} \tilde{\mu}'_i \left(T - \frac{x}{\lambda_i} \right) + \frac{1}{\lambda_i} \tilde{\nu}'_i \left(T + \frac{x-l}{\lambda_i} \right) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (12) по x :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\Phi}'_{i1}(x+\lambda_i T) + \tilde{\Phi}'_{i1}(x-\lambda_i T)}{2} + \frac{\tilde{\Psi}_{i1}(x+\lambda_i T) - \tilde{\Psi}_{i1}(x-\lambda_i T)}{2\lambda_i} - \\ - \frac{1}{\lambda_i} \tilde{\mu}'_i \left(T - \frac{x}{\lambda_i} \right) + \frac{1}{\lambda_i} \tilde{\nu}'_i \left(T + \frac{x-l}{\lambda_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя (13) и равенства системы (12), выразим функции, задающие граничные управления:

$$\tilde{\nu}'_i \left(T + \frac{x-l}{\lambda_i} \right) = \frac{\lambda_i}{2} \left(-\tilde{\Phi}'_{i1}(x+\lambda_i T) - \frac{\tilde{\Psi}_{i1}(x+\lambda_i T)}{\lambda_i} \right), \quad (14)$$

$$\tilde{\mu}'_i \left(T - \frac{x}{\lambda_i} \right) = \frac{\lambda_i}{2} \left(\tilde{\Phi}'_{i1}(x-\lambda_i T) - \frac{\tilde{\Psi}_{i1}(x-\lambda_i T)}{\lambda_i} \right). \quad (15)$$

Так как $\tilde{\mu}_i(t) \equiv 0$, $\tilde{\nu}_i(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$, то получаем следующие условия:

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}'_{i1}(x) - \frac{\tilde{\Psi}_{i1}(x)}{\lambda_i} = 0, & 0 \leq x \leq l - \lambda_i T, \\ \tilde{\Phi}'_{i1}(x) + \frac{\tilde{\Psi}_{i1}(x)}{\lambda_i} = 0, & \lambda_i T \leq x \leq l. \end{cases} \quad (16)$$

В уравнениях (14) и (15) воспользуемся свойствами продолжения функций $\tilde{\Phi}_{i1}$, $\tilde{\Psi}_{i1}$ относительно точек $x = 0$, $x = l$ и выполним замены $z = T + \frac{x-l}{\lambda_i}$, $z = T - \frac{x}{\lambda_i}$ соответственно. Интегрируя по z от 0 до t и учитывая условия согласования начальных и краевых условий, получим окончательные выражения для управляющих функций $\tilde{\mu}_i$, $\tilde{\nu}_i$:

$$\tilde{\mu}_i(t) = \frac{\tilde{\varphi}_{i1}(\lambda_i t)}{2} + \frac{1}{2\lambda_i} \int_0^{\lambda_i t} \tilde{\psi}_{i1}(z) dz, \quad (17)$$

$$\tilde{\nu}_i(t) = \frac{\tilde{\varphi}_{i1}(l - \lambda_i t)}{2} + \frac{1}{2\lambda_i} \int_{l-\lambda_i t}^l \tilde{\psi}_{i1}(z) dz. \quad (18)$$

Для записи выражений управляющих функций $\mu(t)$, $\nu(t)$ введём дополнительные обозначения:

$$\tilde{\varphi}_i(x) = S^{-1}\varphi_i(x) = \frac{1}{|S|} \begin{pmatrix} \frac{\beta s_{12}}{\lambda_2^2 - q} & -s_{12} \\ -t_{21} & \frac{\alpha s_{21}}{\lambda_1^2 - p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{1i}(x) \\ \varphi_{2i}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \end{pmatrix} \cdot \varphi_i(x), \quad (19)$$

$$\tilde{\psi}_i(x) = S^{-1}\psi_i(x) = \frac{1}{|S|} \begin{pmatrix} \frac{\beta s_{12}}{\lambda_2^2 - q} & -s_{12} \\ -t_{21} & \frac{\alpha s_{21}}{\lambda_1^2 - p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_{1i}(x) \\ \psi_{2i}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \end{pmatrix} \cdot \psi_i(x). \quad (20)$$

Используя обозначения (19), (20) запишем

$$\tilde{\mu}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_1(t) \\ \tilde{\mu}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\langle \bar{l}_1 \cdot \varphi_1(\lambda_1 t) \rangle}{2} + \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^{\lambda_1 t} \langle \bar{l}_1 \cdot \psi_1(z) \rangle dz \\ \frac{\langle \bar{l}_2 \cdot \varphi_1(\lambda_2 t) \rangle}{2} + \frac{1}{2\lambda_2} \int_0^{\lambda_2 t} \langle \bar{l}_2 \cdot \psi_1(z) \rangle dz \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\tilde{\nu}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(t) \\ \tilde{\nu}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\langle \bar{l}_1 \cdot \varphi_1(l - \lambda_1 t) \rangle}{2} + \frac{1}{2\lambda_1} \int_{l - \lambda_1 t}^l \langle \bar{l}_1 \cdot \psi_1(z) \rangle dz \\ \frac{-\langle \bar{l}_2 \cdot \varphi_1(l - \lambda_2 t) \rangle}{2} + \frac{1}{2\lambda_2} \int_{l - \lambda_2 t}^l \langle \bar{l}_2 \cdot \psi_1(z) \rangle dz \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где $\langle a \cdot b \rangle$ — скалярное произведение векторов.

Управляющие функции в условиях задачи 1 примут вид:

$$\mu(t) = S \cdot \tilde{\mu}(t), \quad \nu(t) = S \cdot \tilde{\nu}(t). \quad (23)$$

Перейдём к решению задачи 2. Решение краевой задачи (7), (9), (10) имеет вид [15]:

$$\begin{cases} w_1(x, t) = \frac{\tilde{\Phi}_{12}(x + \lambda_1(T-t)) + \tilde{\Phi}_{12}(x - \lambda_1(T-t))}{2} - \frac{1}{2\lambda_1} \int_{x - \lambda_1(T-t)}^{x + \lambda_1(T-t)} \tilde{\Psi}_{12}(z) dz + \tilde{\mu}_1 \left(t + \frac{x}{\lambda_1} \right) + \tilde{\nu}_1 \left(t + \frac{l-x}{\lambda_1} \right), \\ w_2(x, t) = \frac{\tilde{\Phi}_{22}(x + \lambda_2(T-t)) + \tilde{\Phi}_{22}(x - \lambda_2(T-t))}{2} - \frac{1}{2\lambda_2} \int_{x - \lambda_2(T-t)}^{x + \lambda_2(T-t)} \tilde{\Psi}_{22}(z) dz + \tilde{\mu}_2 \left(t + \frac{x}{\lambda_2} \right) + \tilde{\nu}_2 \left(t + \frac{l-x}{\lambda_2} \right). \end{cases} \quad (24)$$

Воспользуемся тем, что в начальный момент времени система покоилась:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\Phi}_{i2}(x + \lambda_i T) + \tilde{\Phi}_{i2}(x - \lambda_i T)}{2} - \frac{1}{2\lambda_i} \int_{x - \lambda_i T}^{x + \lambda_i T} \tilde{\Psi}_{i2}(z) dz + \tilde{\mu}_i \left(\frac{x}{\lambda_i} \right) + \tilde{\nu}_i \left(\frac{l-x}{\lambda_i} \right) = 0, \\ \frac{\tilde{\Phi}'_{i2}(x - \lambda_i T) - \tilde{\Phi}'_{i2}(x + \lambda_i T)}{2} + \frac{\tilde{\Psi}_{i2}(x + \lambda_i T) + \tilde{\Psi}_{i2}(x - \lambda_i T)}{2\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i} \tilde{\mu}'_i \left(\frac{x}{\lambda_i} \right) + \frac{1}{\lambda_i} \tilde{\nu}'_i \left(\frac{l-x}{\lambda_i} \right) = 0, \end{cases} \quad (25)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (25) по x :

$$\frac{\tilde{\Phi}'_{i2}(x - \lambda_i T) + \tilde{\Phi}'_{i2}(x + \lambda_i T)}{2} + \frac{-\tilde{\Psi}_{i2}(x + \lambda_i T) + \tilde{\Psi}_{i2}(x - \lambda_i T)}{2\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i} \tilde{\mu}'_i \left(\frac{x}{\lambda_i} \right) - \frac{1}{\lambda_i} \tilde{\nu}'_i \left(\frac{l-x}{\lambda_i} \right) = 0, \quad (26)$$

Используя (26) и равенства системы (25), выразим функции $\tilde{\mu}_i$, $\tilde{\nu}_i$:

$$\tilde{\mu}'_i \left(\frac{x}{\lambda_i} \right) = -\frac{\lambda_i}{2} \tilde{\Phi}'_{i2}(x - \lambda_i T) - \frac{\tilde{\Psi}_{i2}(x - \lambda_i T)}{2}, \quad (27)$$

$$\tilde{\nu}'_i \left(\frac{l-x}{\lambda_i} \right) = \frac{\lambda_i}{2} \left(\tilde{\Phi}'_{i2}(x + \lambda_i T) - \frac{\tilde{\Psi}_{i2}(x + \lambda_i T)}{\lambda_i} \right). \quad (28)$$

Поскольку $\tilde{\mu}_i(t) = 0$, $\tilde{\nu}_i(t) = 0$ для $t \geq T$, то получаем следующие условия на функции $\tilde{\varphi}_{i2}$, $\tilde{\psi}_{i2}$:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}'_{i2}(x) + \frac{\tilde{\psi}_{i2}(x)}{\lambda_i} \equiv 0, & 0 \leq x \leq l - \lambda_i T, \\ \tilde{\varphi}'_{i2}(x) - \frac{\tilde{\psi}_{i2}(x)}{\lambda_i} \equiv 0, & \lambda_i T \leq x \leq l. \end{cases} \quad (29)$$

Система (29) определяет необходимые условия существования граничных управлений [1].

В уравнениях (27) и (28) заменим $z = \frac{x}{\lambda_i}$, $z = \frac{l-x}{\lambda_i}$ соответственно и воспользуемся свойствами продолжения функций $\tilde{\Phi}_{i2}$, $\tilde{\Psi}_{i2}$ относительно точек $x = 0$ и $x = l$, получим:

$$\begin{cases} \tilde{\mu}'_i(z) = -\frac{\lambda_i}{2} \tilde{\varphi}'_{i2}(l - \lambda_i z) + \frac{\tilde{\psi}_{i2}(l - \lambda_i z)}{2}, \\ \tilde{\nu}'_i(z) = \frac{\lambda_i}{2} \tilde{\varphi}'_{i2}(\lambda_i z) + \frac{\tilde{\psi}_{i2}(\lambda_i z)}{2}. \end{cases} \quad (30)$$

Проинтегрируем равенства последней системы и, воспользовавшись условиями согласования финальных и краевых условий, получим явный вид граничных управлений в условиях задачи 2:

$$\tilde{\mu}_i(t) = \frac{\tilde{\varphi}_{i2}(l - \lambda_i t)}{2} - \frac{1}{2\lambda_i} \int_0^{l - \lambda_i t} \tilde{\psi}_{i2}(z) dz, \quad (31)$$

$$\tilde{\nu}_i(t) = \frac{\tilde{\varphi}_{i2}(\lambda_i t)}{2} - \frac{1}{2\lambda_i} \int_{\lambda_i t}^l \tilde{\psi}_{i2}(z) dz. \quad (32)$$

Запишем функции $\tilde{\mu}(t)$, $\tilde{\nu}(t)$, используя обозначения (19), (20):

$$\tilde{\mu}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_1(t) \\ \tilde{\mu}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\langle \bar{l}_1 \cdot \varphi_2(l - \lambda_1 t) \rangle}{2} - \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^{l - \lambda_1 t} \langle \bar{l}_1 \cdot \psi_2(z) \rangle dz \\ \frac{\langle \bar{l}_2 \cdot \varphi_2(l - \lambda_2 t) \rangle}{2} - \frac{1}{2\lambda_2} \int_0^{l - \lambda_2 t} \langle \bar{l}_2 \cdot \psi_2(z) \rangle dz \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$\tilde{\nu}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(t) \\ \tilde{\nu}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\langle \bar{l}_1 \cdot \varphi_2(\lambda_1 t) \rangle}{2} - \frac{1}{2\lambda_1} \int_{\lambda_1 t}^l \langle \bar{l}_1 \cdot \psi_1(z) \rangle dz \\ \frac{\langle \bar{l}_2 \cdot \varphi_2(\lambda_2 t) \rangle}{2} - \frac{1}{2\lambda_2} \int_{\lambda_2 t}^l \langle \bar{l}_2 \cdot \psi_2(z) \rangle dz \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Управляющие функции в условиях задачи 2 примут вид:

$$\mu(t) = S \cdot \tilde{\mu}(t), \quad \nu(t) = S \cdot \tilde{\nu}(t). \quad (35)$$

Тогда управляющие функции в условиях первой краевой задачи можно представить так:

$$\mu(t) = S \cdot (\underline{\tilde{\mu}} + \tilde{\mu}), \quad \nu(t) = S \cdot (\underline{\tilde{\nu}} + \tilde{\nu}). \quad (36)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для любого $0 < T < \frac{1}{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}}$ и для любых функций $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\varphi_i(x) \in C^2[0, l]$, $\psi_i(x) \in C^1[0, l]$;
- 2) $\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = 0$; $\psi_i(0) = \psi_i(l) = 0$, где $i = 1, 2$;
- 3) справедливы тождества:

$$\begin{cases} (\langle \bar{l}_i \cdot \varphi_1(x) \rangle)' - \frac{\langle \bar{l}_i \cdot \psi_1(x) \rangle}{\lambda_i} \equiv 0, & 0 \leq x \leq l - \lambda_i T, \\ (\langle \bar{l}_i \cdot \varphi_1(x) \rangle)' + \frac{\langle \bar{l}_i \cdot \psi_1(x) \rangle}{\lambda_i} \equiv 0, & \lambda_i T \leq x \leq l, \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} (\langle \bar{l}_i \cdot \varphi_2(x) \rangle)' + \frac{\langle \bar{l}_i \cdot \psi_2(x) \rangle}{\lambda_i} \equiv 0, & 0 \leq x \leq l - \lambda_i T, \\ (\langle \bar{l}_i \cdot \varphi_2(x) \rangle)' - \frac{\langle \bar{l}_i \cdot \psi_2(x) \rangle}{\lambda_i} \equiv 0, & \lambda_i T \leq x \leq l, \end{cases} \quad (38)$$

граничные управления $u(0, t) = \mu(t)$ и $u(l, t) = \nu(t)$ имеют вид (36).

В заключение отметим, что система (1) описывает продольно-крутильное колебание длинной естественно закрученной нити [16, 17].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Знаменская, Л. Н. Управление упругими колебаниями [Текст] / Л. Н. Знаменская. — М.: Физматлит, 2004. — 176 с.
2. Бутковский, А. Г. Теория оптимального управления системами с распределёнными параметрами [Текст] / А. Г. Бутковский. — М.: Наука, 1965. — 474 с.
3. Ильин, В. А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени [Текст] / В. А. Ильин // Дифференциальные уравнения. — 1999. — Т. 35, № 11. — С. 1517–1534.
4. Ильин, В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах [Текст] / В. А. Ильин // Докл. РАН. — 1999. — Т. 369, № 5. — С. 592–596.
5. Ильин, В. А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закреплённом втором конце [Текст] / В. А. Ильин // Докл. РАН. — 1999. — Т. 369, № 6. — С. 732–735.
6. Ильин, В. А. Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закреплённом втором конце [Текст] / В. А. Ильин // Дифференциальные уравнения. — 1999. — Т. 35, № 12. — С. 1640–1659.
7. Ильин, В. А. Граничное управление радиально-симметричными колебаниями круглой мембраны [Текст] / В. А. Ильин, Е. И. Моисеев // Докл. РАН. — 2003. — Т. 393, № 6. — С. 730–734.
8. Никитин, А. А. Граничное управление упругой силой на одном конце струны [Текст] / А. А. Никитин // Докл. РАН. — 2006. — Т. 406, № 4. — С. 458–461.
9. Сабитова, Ю. К. О гладкости решения задачи граничного управления на двух концах для уравнения струны [Текст] / Ю. К. Сабитова // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 1. — С. 133–134.
10. Ильин, В. А. Волновое уравнение с краевым управлением [Текст] / В. А. Ильин, В. В. Тихомиров // Дифференциальные уравнения. — 1999. — Т. 35, № 1. — С. 137–138.
11. Знаменская, Л. Н. Управление колебаниями струны в классе обобщённых решений из L_2 [Текст] / Л. Н. Знаменская // Дифференциальные уравнения. — Т. 38, № 5. — С. 666–672.
12. Боровских, А. В. Формулы граничного управления неоднородной струной I [Текст] / А. В. Боровских // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 1. — С. 64–89.
13. Боровских, А. В. Формулы граничного управления неоднородной струной II [Текст] / А. В. Боровских // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 5. — С. 640–649.
14. Ильин, В. А. О граничном управлении процессом, описываемым уравнением $k(x)[k(x)u_x(x, t)]_x - u_{tt}(x, t) = 0$ [Текст] / В. А. Ильин // Докл. РАН. — 2002. — Т. 386, № 2. — С. 156–159.
15. Андреев, А. А. О граничном управлении системы продольно-крутильных колебаний [Текст] / А. А. Андреев, С. В. Лексина / В сб. СамДифф-2007: Тез. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения». — Самара: Универс групп, 2007. — С. 21–25. — ISBN 978-5-467-00115-9.
16. Лексина, С. В. Аналог формулы Даламбера для системы волновых уравнений [Текст] / С. В. Лексина / В сб. Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: Тез. докл. Международ. конф-ции, посвящённой 100-летию со дня рождения акад. И. Н. Векуа (Новосибирск, 26.05–02.06.2007г.). — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. — С. 216.
16. Горошко, О. А. К вопросу о продольно-крутильных колебаниях упругой естественно закрученной нити (каната) переменной длины с концевым грузом, движущимся по жёстким направляющим [Текст] / О. А. Горошко, А. А. Чиж; В кн.: Стальные канаты. — Киев: Техника, 1964. — Т. 1. — С. 56–64.
17. Горошко, О. А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины [Текст] / О. А. Горошко, Г. Н. Савин. — Киев: Наукова думка, 1971. — 225 с.

Самарский государственный университет, г. Самара
andre@ssu.samara.ru, lesveta@rambler.ru

Поступила 27.10.2007

В окончательном варианте
15.02.2008

A. A. Andreev, S. V. Lexina

THE BOUNDARY CONTROL PROBLEM FOR THE SYSTEM OF WAVE EQUATIONS

In the paper we consider the control problem for objects which vibration are described by wave equation system with boundary condition of the first type. Necessary condition on function determining initial and final conditions are obtained.

Samara State University, Samara, Russia
andre@ssu.samara.ru, lesveta@rambler.ru

Received 27.10.2007