Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Чадаев, Численное решение краевой задачи для междупредельного дифференциального уравнения методом модифицированной прогонки, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 11–14

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:00:07

УДК 517.95

В. А. Чадаев

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МЕЖДУПРЕДЕЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПРОГОНКИ

Рассмотрена модификация метода прогонки для численного решения краевой задачи для междупредельного дифференциального уравнения. Доказана теорема об устойчивости вычислительного процесса для нахождения прогоночных коэффициентов.

Рассмотрим междупредельное дифференциальное уравнение

$$Ly \equiv D_{0x}^{\alpha+1}y(t) + p(x)D_{0x}^{\beta}y(t) + q(x)y(x) = f(x) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(l) = r, \quad (2)$$

где D_{0x}^{ε} — оператор дробного (в смысле Римана—Лиувилля) дифференцирования порядка $0 < \varepsilon \leq 2$ с началом в точке 0 и с концом в точке $x \in [0, l]$ [1, 2]; $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$; $y(x) \in C^4[0, l]$; $p(x)$, $q(x) \in C[0, l]$.

Известно [3], что

$$а) D_{0x}^{\beta}y(t) = y(0)\frac{x^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x y'(t)(x-t)^{-\beta} dt,$$

но так как $y(0) = 0$, то имеем

$$D_{0x}^{\beta}y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x y'(t)(x-t)^{-\beta} dt = \partial_{0x}^{\beta}y(t), \quad (3)$$

где ∂_{0x}^{β} — регуляризованный оператор дробного порядка β [4];

$$б) D_{0x}^{\alpha+1}y(t) = y(0)\frac{x^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} + y'(0)\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x y''(t)(x-t)^{-\alpha} dt,$$

но так как $y(0) = 0$, то имеем

$$D_{0x}^{\alpha+1}y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(y'(0)x^{-\alpha} + \int_0^x y''(t)(x-t)^{-\alpha} dt \right). \quad (4)$$

Разобьём отрезок $[0, l]$ на N равных частей, тогда $h = \frac{l}{N}$, $x_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, N$); $x_0 = 0$, h — шаг равномерной сетки $\omega_n = \{x_k\}$.

Через y_k обозначим значение $y(x_k)$ непрерывной функции $y(x)$ в узле x_k сетки ω_n . Функцию целочисленного аргумента y_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) можно рассматривать как сеточную функцию.

Пусть Δ и ∇ — правый и левый разностные операторы [5, с. 20]; $R = \Delta\nabla$ — разностный оператор Римана (или симметрический) второго порядка; $S_k^{\alpha} = k^{1-\alpha}$ — степенная сеточная функция.

Для первой производной можно положить

$$y'(t) = \frac{\Delta y_{k-1}}{h} + O(h), \quad \forall t \in [x_{k-1}, x_k],$$

где $O(h)$ — символ Ландау и

$$O(h) \leq \frac{h}{2} \max_{[x_{k-1}, x_k]} |y''(t)|, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

а для второй производной имеем

$$y''(t) = \frac{Ry_k}{h^2} + O(h^2) = \frac{\Delta^2 y_{k-1}}{h^2} + O(h^2), \quad \forall t \in [x_{k-1}, x_{k+1}],$$

где

$$O(h^2) \leq \frac{h^2}{12} \max_{[x_{k-1}, x_{k+1}]} |y^{IV}(t)|, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Для $i = 1, 2, \dots, N$ с учётом формулы (3) имеем

$$\begin{aligned} D_{0x_i}^\beta y(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\Delta y_{k-1} + hO(h)}{h} (x_i - t)^{-\beta} dt = \\ &= \frac{1}{h\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=1}^i (\Delta y_{k-1} + hO(h)) (x_{i-k+1}^{1-\beta} - x_{i-k}^{1-\beta}) = \frac{h^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=1}^i (\Delta y_{k-1} + hO(h)) \Delta S_{i-k}^\beta = \\ &= \frac{h^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=1}^i \Delta y_{k-1} \Delta S_{i-k}^\beta + \frac{h^{1-\beta} O(h)}{\Gamma(2-\beta)} i^{1-\beta}, \quad (5) \end{aligned}$$

а для формулы (4) получим аналогично

$$\begin{aligned} D_{0x_i}^{\alpha+1} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(y'(0) x_i^{-\alpha} + \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\Delta^2 y_{k-1} + h^2 O(h^2)}{h^2} (x_i - t)^{-\alpha} dt \right) = \\ &= \frac{y'(0) x_i^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{h^2 \Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^i (\Delta^2 y_{k-1} + h^2 O(h^2)) (x_{i-k+1}^{1-\alpha} - x_{i-k}^{1-\alpha}) = \\ &= \frac{y'(0) x_i^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{h^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^i (\Delta^2 y_{k-1} + h^2 O(h^2)) \Delta S_{i-k}^\alpha = \\ &= \frac{y'(0) x_i^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{h^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^i \Delta^2 y_{k-1} \Delta S_{i-k}^\alpha + \frac{h^{1-\alpha} \cdot O(h^2)}{\Gamma(2-\alpha)} i^{1-\alpha}. \quad (6) \end{aligned}$$

Для (3) и (4) запишем окончательно

$$D_{0x_i}^\beta y(t) \approx \Delta_{0x_i}^\beta y(t) + R_\beta(h, i), \quad (7)$$

$$D_{0x_i}^{\alpha+1} y(t) \approx \Delta_{0x_i}^{\alpha+1} y(t) + R_\alpha(h, i), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{0x_i}^\beta y(t) &= \frac{h^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=1}^i \Delta y_{k-1} \Delta S_{i-k}^\beta, \\ \Delta_{0x_i}^{\alpha+1} y(t) &= \frac{y'(0) x_i^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{h^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^i \Delta^2 y_{k-1} \Delta S_{i-k}^\alpha, \\ R_\beta(h, i) &\leq \frac{h}{2\Gamma(2-\beta)} \max_{[0, x_i]} |y''(t)| x_i^{1-\beta}, \\ R_\alpha(h, i) &\leq \frac{h^2}{12\Gamma(2-\alpha)} \max_{[0, x_i]} |y^{IV}(t)| x_i^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Для уравнения (1) выпишем его разностный аналог с учётом (7), (8), отбросив последние члены:

$$L^h y \equiv \Delta_{0x_i}^{\alpha+1} y(t) + p(x_i) \Delta_{0x_i}^\beta y(t) + q(x_i) y(x_i) = f(x_i). \quad (9)$$

Пусть

$$b_{i,k} = (h^{-\beta} \Delta S_{i-k}^{\beta} / \Gamma(2 - \beta)) p(x_i), \quad (10)$$

$$a_{i,k} = h^{-1-\alpha} \Delta S_{i-k}^{\alpha} / \Gamma(2 - \alpha). \quad (11)$$

Полагая $y'(0) = \frac{y_1 - y_0}{h}$, с учётом (10) и (11) уравнение (9) примет вид

$$\frac{y_1 x_i^{-\alpha}}{h \Gamma(1 - \alpha)} + \sum_{k=1}^i (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) a_{i,k} + \sum_{k=1}^i (y_k - y_{k-1}) b_{i,k} + q_i y_i = f_i, \quad (12)$$

где $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

В формуле (12) необходимо считать $\Delta^2 y_{N-1} = R y_{N-1}$.

Пусть

$$A_{i,k} = a_{i,k} - b_{i,k}; \quad B_{i,k} = b_{i,k} - 2a_{i,k}; \quad C_{i,k} = a_{i,k}; \quad E_i = \frac{x_i^{-\alpha}}{h \Gamma(1 - \alpha)}. \quad (13)$$

Подставив (13) в уравнение (12), получим

$$y_1 E_i + \sum_{k=1}^i (A_{i,k} y_{k-1} + B_{i,k} y_k + C_{i,k} y_{k+1}) + q_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (14)$$

Приведя подобные члены и учитывая, что $y_0 = 0$, $y_N = r$, получим систему $N-1$ уравнений с $N-1$ неизвестными. Допустим, что $d_{n,k}$ — элементы матрицы этой системы, тогда матрица D будет иметь вид:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{N-2,1} & d_{N-2,2} & d_{N-2,3} & \dots & d_{N-2,N-1} & 0 \\ d_{N-1,1} & d_{N-1,2} & d_{N-1,3} & \dots & d_{N-1,N-1} & d_{N-1,N} \end{pmatrix}.$$

Система (14) примет вид

$$DY = F, \quad (15)$$

где $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_{N-1})^T$. Система (15) для $\alpha = \beta = 1$ превращается в трёхдиагональную систему, которая решается методом «прогонки», и достаточным условием устойчивости её решения является признак диагонального преобладания [6]. Так как «прогонка» является частным случаем метода последовательных исключений Гаусса (с прямым и обратным ходами), учитывая определённую «разрежённость» [7] матрицы D (матрица D является нижней почти треугольной или матрицей Хессенберга, которая отличается от треугольной наличием ещё одной побочной диагонали [8]), предложим следующий метод решения системы (15), который можно назвать модификацией метода «прогонки» [9, 10].

Систему (15) решим следующим образом. Пусть $K_0 = L_0 = 0$; $\alpha_{k,0} = 0$; $\beta_{k,0} = f_k$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$). Для всех $n = 1, 2, \dots, N-1$ и для всех $k = n, n+1, \dots, N-1$ положим

$$\alpha_{k,n} = d_{k,n} - \alpha_{k,n-1} K_{n-1}, \quad \beta_{k,n} = \beta_{k,n-1} - \alpha_{k,n-1} L_{n-1}; \quad L_n = \frac{\beta_{n,n}}{\alpha_{n,n}}, \quad K_n = \frac{d_{n,n+1}}{\alpha_{n,n}}.$$

Тогда для обратного хода имеем

$$y_n = L_n - K_n y_{n+1}, \quad n = N-1, N-2, \dots, 2, 1.$$

ТЕОРЕМА. *Вычислительный процесс для нахождения L_n и K_n устойчив, если существует такое число $\tau > 1 + \alpha$, что для всех главных диагональных миноров D_n определителя D выполняется*

$$\frac{|D_{n-1}|}{|D_n|} = O(h^\tau).$$

Нетрудно убедиться, что $\alpha_{n,n} = \frac{|D_n|}{|D_{n-1}|}$, но тогда $K_n = d_{n,n+1} \frac{|D_{n-1}|}{|D_n|}$.
Известно также, что

$$d_{n,n+1} = a_{n,n} = \frac{\Delta S_0^\alpha}{h^{1+\alpha}\Gamma(2-\alpha)} = \frac{1}{h^{1+\alpha}\Gamma(2-\alpha)},$$

тогда

$$K_n = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{O(h^\tau)}{h^{1+\alpha}} = \frac{O(h^{\tau-1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Отсюда видно, что K_n будет ограничено при $h \rightarrow 0$, если $\tau - 1 - \alpha > 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нахушев, А. М.* Уравнения математической биологии [Текст] / А. М. Нахушев. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.
2. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения [Текст] / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
3. *Нахушев, А. М.* К теории дробного исчисления [Текст] / А. М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24, № 2. — С. 313–324.
4. *Нахушев, А. М.* Дробное исчисление и его применение [Текст] / А. М. Нахушев. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
5. *Самарский, А. А.* Введение в численные методы [Текст] / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1997. — 239 с.
6. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем [Текст] / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1983. — 616 с.
7. *Тьюарсон, Р.* Разреженные матрицы [Текст] / Р. Тьюарсон. — М.: Мир, 1977. — 191 с.
8. *Parlett, B. N.* Global convergence of the basic QR-algorithm on Hessenberge matrices [Text] / B. N. Parlett // Math. Comp. — 1968. — Vol. 22. — P. 803–817.
9. *Чадаев, В. А.* Численное решение краевой задачи методом модифицированной прогонки для дифференциального уравнения дробного порядка [Текст] / В. А. Чадаев // Мухтаровские чтения: Международ. конф. — Махачкала, 2007. — С. 110–111.
10. *Чадаев, В. А.* Решение краевой задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка методом модифицированной прогонки [Текст] / В. А. Чадаев // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: Международ. конф., посвящённая 100-летию со дня рождения акад. И. Н. Векуа. — Новосибирск, 2007. — С. 351–352.

Чеченский государственный университет, г. Грозный
niipma@mail333.com

Поступила 01.10.2007

V. A. Chadaev

COUNTED DECISION OF MARGINAL PROBLEM FOR BETWEEN LIMITING DIFFERENTIAL EQUATION BY METHOD OF MODIFIED RUNNING

Modified method of running for counted decisions of marginal problem for between limiting differential equation is considered. Theorem about stability of computing process for finding of factors of running is proved.

Chechen State University, Grozny, Russia
niipma@mail333.com

Received 01.10.2007